



Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften

VORTRÄGE
N 448

FRIEDEL H. W. HOSSFELD

Komplexität und Berechenbarkeit:
Über die Möglichkeiten
und Grenzen des Computers



Springer Fachmedien
Wiesbaden GmbH



Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften

Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften

Vorträge · N 448

Herausgegeben von der
Nordrhein-Westfälischen Akademie der Wissenschaften

FRIEDEL H. W. HOSSFELD

Komplexität und Berechenbarkeit:
Über die Möglichkeiten und Grenzen des Computers



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

449. Sitzung am 6. Oktober 1999 in Düsseldorf

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2000

Ursprünglich erschienen bei Westdeutscher Verlag GmbH, Wiesbaden, 2000



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

ISSN 0944-8799

ISBN 978-3-531-08448-0 ISBN 978-3-663-14381-9 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-14381-9

Inhalt

Friedel H. W. Hoßfeld, Jülich

Komplexität und Berechenbarkeit:

Über die Möglichkeiten und Grenzen des Computers

1. Rückblicke	7
2. Wechselwirkung der Technologie, Architektur und Mathematik	9
2.1 John von Neumanns „Digitaler Windkanal“	10
2.2 Das Wissenschaftliche Rechnen	11
2.4 Der Weg zur parallelen Rechnerarchitektur	13
3. Komplexität und Berechenbarkeit	17
3.1 Effiziente Algorithmen und harte Probleme	18
3.2 Die Turing-Maschine: Berechnungsmodell und Entscheidbarkeit ..	22
4. Jenseits der Grenzen	25
Literatur	27

1. Rückblicke

Es ist fast genau fünfundvierzig Jahre her, daß auf Einladung des großen nordrhein-westfälischen Forschungsstrategen der 50er Jahre, des damaligen Staatssekretärs Leo Brandt, John von Neumann hier einen stark nachwirkenden Vortrag hielt: Am 15. September 1954 sprach John von Neumann vor der Arbeitsgemeinschaft für Forschung, d. h. dem Vorgänger dieser Akademie, über das Thema „Entwicklung und Ausnutzung neuerer mathematischer Maschinen“, und die Anwesenheitsliste und das Diskussionsprotokoll weisen aus, daß viele berühmte Mathematiker, Ingenieure und Physiker, aber auch Ministerialbeamte im Auditorium waren [1]. Denn Leo Brandt hatte John von Neumann nicht nur zu einem Kolloquiumsvortrag eingeladen, sondern ihn gebeten, eine ganze Woche für forschungspolitische Gespräche in Düsseldorf zu bleiben.

Es war die Zeit, als mit der wachsenden neuen Autonomie die Weichen für die Wiedererstarkung der deutschen Forschung gestellt werden mußten, und John von Neumann erschien aufgrund seiner europäischen Wurzeln und seiner forschungspolitischen Wirkung in den USA als ein kluger Ratgeber bei der Neugestaltung der Forschungslandschaft, insbesondere, was die Wechselwirkung der neuen – digitalen – Rechenmaschinen mit der Mathematik und ihren naturwissenschaftlichen und technischen Anwendungen anging, für die er in den 40er Jahren die entscheidenden Grundpfeiler gesetzt hatte [2, 3]. So erscheint es plausibel, daß der Besuch John von Neumanns im Jahre 1954 wesentlichen Anteil am Ursprung des Zentralinstitutes für Angewandte Mathematik in der Jülicher Forschungsanlage trägt, deren ursprüngliche Gründung als Großforschungszentrum des Landes Nordrhein-Westfalen im Jahre 1956 ja wohl vorrangig Leo Brandt zu verdanken ist.

Mit der Gründung des John von Neumann Institutes für Computing als von der Stiftung Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY und dem Forschungszentrum Jülich gemeinsam getragenen Supercomputer-Zentrum für die deutsche Wissenschaft und Forschung würdigen wir die großen wissenschaftlichen Leistungen John von Neumanns in der Computerwissenschaft und Mathematik und seine wirkungsvollen Impulse auf die Anwendungen des Computers [4]. Das breite Spektrum seiner wissenschaftlichen Interessen förderte

ganz unterschiedliche Naturwissenschaften und reichte, von der Mathematik und der Chemie ausgehend, über Rechnerarchitektur, Automaten- und Spieltheorie bis zur Quantenmechanik, Hydrodynamik und Meteorologie [5]. Die heute so vordringlich geforderte Interdisziplinarität war ihm auf ganz natürliche Weise zu eigen. Seine Motivation zur Entwicklung des Digitalrechners, dessen Architektur gleichwohl seinen Namen trägt, erwuchs aus den Anforderungen nichtlinearer Probleme, die das Verhalten komplexer Systeme bestimmen und die mit den begrenzten Mitteln der Analysis nicht mehr zu lösen waren. So kann die Definition des sequentiellen Digitalrechners durch John von Neumann in den Jahren 1946–1948 auch als Geburtsstunde der Computersimulation als dritter Säule wissenschaftlichen Forschens gelten.

Die Weiterentwicklung seines Rechnerentwurfes hat in den Jahrzehnten seitdem zu fruchtbarer Vielfalt der Rechnerarchitekturen geführt. Nach meinem vor exakt fünfzehn Jahren vor der Klasse für Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften gehaltenen Vortrag über „Parallelrechner – die Architektur für neue Problemdimensionen“ hat sich der technologische Fortschritt der Mikroelektronik weiter exponentiell beschleunigt. Die Anwendungsfelder der Computer scheinen grenzenlos zu sein. Computer schaffen mathematische Lösungen, schalten weltweite Netzwerke, steuern Kraftwerke, leiten Flugzeuge, fliegen Raumschiffe; sie schlagen Schachgroßmeister, bauen virtuelle Welten und schaffen musikalische Räume gleichwohl. Und in der Tat steigern Technologie, Informatik und Mathematik die Computerleistung in exponentielle Höhen – die TeraFlops (Billion Gleitkommaoperationen pro Sekunde) werden gerade von den neuen Parallelrechnern markiert; eine Grenze auch dieser Entwicklung scheint nicht in Sicht. Die Ubiquität des Computers suggeriert Omnipotenz! Doch existieren fundamentale Grenzen. Schon als Entwurf und Wirklichkeit des Computers noch fern waren, lieferten abstrakte Maschinenmodelle und Konzepte der Berechenbarkeit darin tiefe Einsichten; ihr Ursprung liegt in den 30er Jahren in dem Werk von Logikern, von Kurt Gödel, Alan Turing, Alonzo Church, Emil Post und anderen [6, 7].

Die Komplexitätstheorie liefert das Rüstzeug dafür, die Kosten der algorithmischen Lösung eines Problems – gemessen in Zeit, Speicherplatz und Kommunikation – im Rahmen eines formalen Berechnungsmodelles zu verstehen. Daraus ergibt sich, daß sich auch einfach erscheinende Fragestellungen der exakten Behandlung auf dem Computer dadurch entziehen, daß ihre Algorithmen praktisch unendlich viel Rechenzeit verlangen. Andere Probleme gar sind unentscheidbar. Bei allem Optimismus hinsichtlich der zukünftigen Entwicklung des Digitalrechners, die der 1957 allzu früh verstorbene John von Neumann nur erahnen konnte, waren ihm diese grundlegenden Schranken des Computers wohl bewußt; denn wie John von Neumann und Albert Einstein

waren Kurt Gödel und Alonzo Church seit den 30er Jahren Mitglieder des Institute for Advanced Study in Princeton, und Alan Turing kam mit seiner bahnbrechenden Arbeit in der Zeit von 1938 bis 1939 als Gast nach Princeton.

2. Wechselwirkung der Technologie, Architektur und Mathematik

Vor 500 Jahren, 1492, wurde Adam Riese in Staffelstein in Franken geboren, dessen „zweites Rechenbuch“ von 1522, das in 140 Jahren 106 Auflagen erfahren sollte [8], das schriftliche Ziffernrechnen für das *Addirn*, *Subtrahirn*, *Duplirn*, *Medirn*, *Multiplicirn* und *Diuidirn* als neue „Technologie“ – wie man wohl heute sagen würde – auf breiter Front einführen konnte; dies wäre ohne die Gutenbergsche Erfindung des neuen „Mediums“ Buchdruck nicht möglich gewesen: Zur innovativen Methode mußte das tragende Medium kommen!

Als Adam Riese sein Buch schrieb, stand das Werk von Nikolaus Kopernikus *De revolutionibus orbium coelestium* ungedruckt auf dem päpstlichen Index; Galileo Galilei wurde 1592 Mathematiker in Padua, Johannes Kepler 1594 Mathematiker in Graz, Tycho Brahe 1599 kaiserlicher Astronom in Prag. Der Bedarf der Astronomie an numerischen Berechnungen wuchs zunehmend. Das gab den Anstoß für vielfältige Versuche zur Mechanisierung dieser arithmetischen Grundoperationen – so auch dem Theologen Wilhelm Schickard, dessen Geburtstag sich 1992 zum vierhundertsten Male jährte. Kepler soll mit den Schickardschen Rechenmaschinen sehr zufrieden gewesen sein. Ohne Zweifel war schon in jener Zeit das *wissenschaftliche* Rechnen ein Motor der „Rechnerentwicklung“, wie ja wohl historisch das Rechnen mit Zahlen durch die Astronomie und ihren hohen wissenschaftlichen Stand in den frühen Hochkulturen im asiatisch-arabischen Raum seine Entwicklungsschübe erfahren hat. Nicht zuletzt trägt eines der wesentlichen Elemente des Rechnens heute, der Algorithmus, seinen Namen nach einem der wohl prägendsten Mathematiker aus dem arabischen Kulturkreis, Abu Ja'far Mohammed ibn Musa *al-Khowarizmi*, der um 825 in Bagdad wirkte und auf dessen Lehrbuch „*Kitab al jabr w'al-muqabala*“ auch der Begriff Algebra zurückgeht. Die Frage, warum es bis zur Renaissance dauerte, daß das mathematische Wissen in Zentraleuropa öffentlich wurde, könnte Augustinus beantworten (A.D. 404 in einer Streitschrift gegen Manichäer): „Im Evangelium liest man nicht, daß der HERR gesagt hätte: Ich schicke euch den Heiligen Geist, damit er euch über den Lauf von Sonne und Mond belehre. ER wollte Christen machen, nicht Mathematiker!“

Der Antrieb aus der Wissenschaft hat sich – von Pascal, Descartes, Leibniz und Babbage über Zuse, Aiken, Mauchly und Eckert bis Piloty und Cray, um

den Brückenbogen nur über diese wenigen Pfeiler der Rechnertechnik zu spannen – bis ans Ende dieses Jahrhunderts zunehmend verstärkt. Vor einem halben Jahrhundert, 1946, präsentierte John von Neumann, aufbauend auf den Computerkonzepten und Pionierarbeiten seiner amerikanischen Kollegen in den letzten Kriegsjahren, sein Manifest über die Notwendigkeit des Digitalrechners [9]; bis 1948 entwarf er dessen Architekturprinzipien [10–13], deren technische Umsetzbarkeit den unaufhaltsamen Erfolg des Computers seitdem ausgemacht hat.

Aber wie bei Adam Riese mußte zu den theoretischen Grundlagen – nämlich dem von Leibniz im frühen 18. Jahrhundert entwickelten System der Dualzahlen und ihrer Binärdarstellung, der von Boole im 19. Jahrhundert entworfenen Schaltalgebra und ihrer exponentiellen Funktionsvielfalt einerseits sowie den Normalformen und den von DeMorgan abgeleiteten, für die weitere technische Entwicklung so entscheidenden Gesetzen andererseits, sowie der Integration dieser Grundlagen in ein geniales Computerkonzept durch John von Neumann – das die Massenproduktion und die technische Weiterentwicklung leistende „Medium“ kommen: die Mikroelektronik, deren „Atom“, der Transistor, 1947 von Bardeen, Brattain und Shockley erfunden wurde und durch die Erfindung der Lithographietechnik durch Noyce 1959 den Weg in die Uniformisierung und Miniaturisierung wies. So wurde die unermeßliche Verdichtung bei den Speicher- und Logikbausteinen möglich. 1970 baute Intel den ersten Mikroprozessor. Der exponentielle Prozeß der Miniaturisierung in der Halbleitertechnologie wird seitdem bestimmt durch *Moore's Law*, das die technische Entwicklung des heutigen Personal Computer mit dem den *Home-Computer* ermöglichenden Preisverfall und die Vernetzung im *Internet* genauso bestimmt wie die Leistungssteigerungen bei den Supercomputern [14–17].

2.1 John von Neumanns „Digitaler Windkanal“

Es ist also etwas mehr als 50 Jahre her, daß John von Neumann – gemeinsam mit seinen Kollegen Goldstine und Burks – die Notwendigkeit der Entwicklung des Digitalrechners artikulierte und gleichzeitig dessen Entwurfsprinzipien darlegte. Sein Anstoß war die Stagnation der analytischen mathematischen Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen, vornehmlich in der Strömungsdynamik, und er wollte mit seinem neuen Konzept des sequentiellen Digitalrechners, dessen Flexibilität seitdem den breiten Durchbruch des Computers in Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft bestimmt hat, den „digitalen Windkanal“ schaffen, um mit numerischen Methoden und

der Simulation der komplexen Strömungsprozesse im Computer die Barriere der Stagnation zu durchbrechen. In einem denkwürdigen Vortrag über „High-Speed Computing Devices and Mathematical Analysis“ beim First Canadian Mathematical Congress im Juni 1945 identifizierte John von Neumann erstmalig die *numerische* Hydrodynamik, auszuführen auf elektronischen Digitalrechnern, als ein Schwerpunktgebiet zukünftiger Forschung. Diese Vorstellungen präsentierte er mit seinem epochemachenden Positionspapier „On the Principles of Large Scale Computing Machines“ im Mai 1946 dem Mathematical Computing Advisory Panel des Office of Research and Inventions im Navy Department in Washington [9]. Damals faßte er die Situation der theoretischen Hydrodynamik so zusammen: „The advance of analysis is, at this moment, stagnant along the entire front of nonlinear problems. ... Mathematicians had nearly exhausted analytic methods which apply mainly to linear differential equations and special geometries“.

John von Neumann schlug vor, daß man die analytischen durch numerische Methoden ersetzen und die Entwicklung der Digitalrechner und ihre Nutzung fördern solle, da digitale Maschinen viel schneller gemacht und mit höherer Flexibilität und Genauigkeit ausgestattet werden könnten als Analogrechner, zu denen er auch die damals für Strömungsexperimente weithin gebrauchten Windkanäle zählte. John von Neumann wollte, wie gesagt, den *Digital Windtunnel*. Er erwartete, daß wirklich effiziente digitale Hochleistungsrechner den toten Punkt bei den rein analytischen Methoden zur Behandlung nichtlinearer Probleme überwinden würden und daß aus der derart numerisch erschlossenen Hydrodynamik die mathematische Durchdringung des Gebietes der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen stimuliert werden könnte, indem sich aus den Computerresultaten jene heuristischen Fingerzeige ergäben, die von jeher in allen Bereichen der Wissenschaft für echte Fortschritte sorgten und so auch in der Hydrodynamik den Schlüssel für entscheidende mathematische Ideen liefern könnten.

2.2 *Das Wissenschaftliche Rechnen*

Das Jahr 1946 ist somit das Geburtsjahr einer grundlegend neuen Methodik, die sich unter dem internationalen Namen „Computational Science & Engineering“ zur dritten, Theorie und Experiment ergänzenden Kategorie wissenschaftlichen Forschens entwickelt hat („virtuelles Labor“); sie ist gleichzeitig auf dem Wege, für die Industrie ein unverzichtbares Instrument zur Optimierung der Produktzyklen zu werden („virtuelles Produkt“). Ihre Methode ist die Simulation, ihr Instrument der Supercomputer! Der wissen-

schaftliche Fokus von *Computational Science & Engineering*, deren strategische und inhaltliche Spannweite im Deutschen mit dem umfassenden Begriff „Wissenschaftliches Rechnen“ eingefangen wird, zielt auf komplexe Systeme, das heißt auf Probleme, die mit den analytischen Methoden und mit den üblichen Computer-Ressourcen einer Lösung nicht näher gebracht werden können. Die wachsende Komplexität der Systeme und Prozesse in Forschung und Technik stellt gleichermaßen steigende Anforderungen an die Genauigkeit der mathematischen Modellbildung, an die Effizienz der numerischen (und nichtnumerischen) Methoden und an die Innovationskraft der Computerarchitektur. Sie erfordert daher im Verbund mit effizienten Algorithmen, Software-Werkzeugen und Programmiermodellen große Leistungssprünge in den Computer-Architekturen.

Die Entwicklung der Mathematik von Differentialgleichungen – und Variationsmethoden – begann mit der Entwicklung der neueren Astronomie und Physik und war von Anbeginn diesen Wissenschaften aufs engste verbunden. Entsprechend der Vielfalt und Schwierigkeit der behandelten Aufgaben haben sich die großen Mathematiker und Physiker des 18. und 19. Jahrhunderts zunächst wissenschaftlich interessanten und auch technisch brennenden Einzelfragen zugewandt. Sie gelangten zwar noch nicht zu einer geschlossenen Theorie der partiellen Differentialgleichungen, doch spiegeln großartige Lehrbücher der theoretischen Physik die Schönheit und Harmonie in den Differentialgleichungen der Physik. Die Entwicklungsgeschichte der Mathematik der partiellen Differentialgleichungen und der Variationsrechnung – und auch teilweise ihrer engen physikalischen Bezüge – über die letzten hundert Jahre haben Bemelmans, Hildebrandt und von Wahl in der Festschrift zum Jubiläum der DMV „Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990“ in eindringlicher Weise dargestellt [18]. Eine gleichermaßen wertvolle Bilanz hat Birkhoff hinsichtlich der Probleme und Lösungen in der Strömungsdynamik geliefert [19]. In diese Wertung bezieht Birkhoff über die Entwicklung der Analysis der partiellen Differentialgleichungen hinaus den Ursprung und den Fortgang der numerischen Methoden für Strömungsprobleme, der *Computational Fluid Dynamics* (CFD), ein. Ergänzt wird seine Sicht noch durch seinen Beitrag zu dem ohnehin lesenswerten Buch „A History of Scientific Computing“, das Stephen G. Nash herausgegeben hat [20]; er würdigt dabei insbesondere den die folgenden Jahrzehnte prägenden Einfluß John von Neumanns.

John von Neumann hat entscheidend dazu beigetragen, daß die konzeptionelle und methodische Unsicherheit in den Jahrzehnten nach 1946 allmählich aufgehoben wurde und auch eine gewisse Aussöhnung zwischen Experiment und mathematischer Analysis zustande kam. Die Computersimulation entwickelte sich in der Tat zunehmend zu der nützlichen Quelle der Einsicht

in die Prozesse der Strömungsmechanik, wie sie sich von Neumann erhofft hatte. Aus diesen wichtigen Fragestellungen höchster Komplexität erwächst erneut die Einsicht, daß die Lösung partieller Differentialgleichungen für die Modellierung die Wissenschaft vor permanente Herausforderungen stellt – und dies trotz der unzweifelhaft großen Fortschritte in der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen und der dramatisch gestiegenen Leistung der Supercomputer [21].

Computational Science & Engineering hat sich als „Inter-Disziplin“ aus mathematischer Modellierung, Computersimulation und Visualisierung (Hamming, 1962: *The purpose of computing is insight, not numbers!*) zu einer strategischen Schlüsseltechnologie entwickelt, die in den USA inzwischen an vielen renommierten Universitäten zu neuen Curricula geführt hat [22]. In der Industrie ist die Design-Optimierung zur Verbesserung der Produkte und zur Beschleunigung der Entwicklungszyklen – eine zunehmend wichtigere Qualität im internationalen Wettbewerb – ein bedeutender Wirtschaftsfaktor, die Kompetenz im wissenschaftlichen Rechnen daher ein unverzichtbarer Standortfaktor geworden. Die neuen strategischen Förderprogramme der USA, ASCI (Accelerated Strategic Computing Initiative), HPCMP (High Performance Computing Modernization Program) und PACI (Partnerships for Advanced Computational Infrastructure), werden dort erneut Innovationsschübe auslösen [23–26].

2.3 Der Weg zur parallelen Rechnerarchitektur

Es mag ein Merkmal des damals herrschenden Optimismus hinsichtlich der zukünftigen Fähigkeiten des Computers sein, daß dort vom „Arithmetic Organ“ und vom „Memory Organ“ die Rede ist [9–13]; auf jeden Fall war 1948 durch von Neumann das neue Konzept der digitalen Maschine definiert, das den Durchbruch des Computers schaffte. Es muß jedoch angemerkt werden, daß sich im weiteren Verlauf der Rechnerentwicklung die Erwartungen der Wissenschaft zunächst nicht erfüllten [27]. Jedoch verbesserte sich nach 1970 die Situation nicht nur im Hinblick auf das Spektrum der für technischnaturwissenschaftliche Anwendungen entworfenen Computer, sondern auch der Markt für Supercomputer wandelte sich. Bild 1 spiegelt die dramatische Entwicklung anhand der Wechselwirkung zwischen Rechnerarchitektur und Algorithmenentwicklung wider [28].

Dabei stützte sich das Wissenschaftliche Rechnen seit den 70er Jahren als eine Antwort auf die frühen Herausforderungen der partiellen Differentialgleichungen zunehmend auf die Vektorrechner ab, die den „von Neumann-

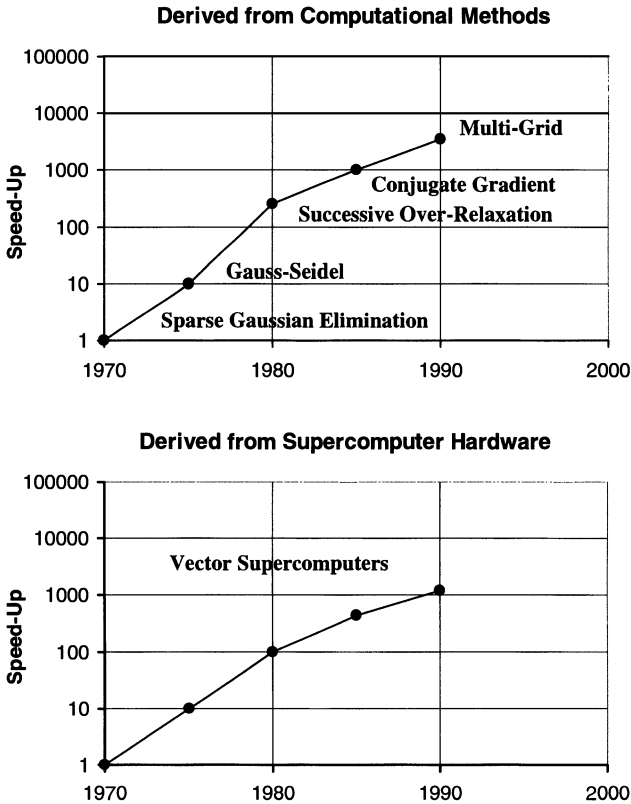


Abb. 1: Leistungsverbesserungen durch numerische Verfahren und Vektorsupercomputer in den Jahren 1970–1990 (Quelle: US HPC Program)

schen Flaschenhals“ der Sequentialität – die maßgebliche Qualität für den breiten Erfolg des Computers schlechthin – durch das Prinzip des Pipelining aufweitete und insbesondere mit der von Seymour Cray konzipierten Architekturlinie der CRAY-1, CRAY-2 und CRAY X-MP und ihrer Weiterentwicklungen am Markt außerordentlich erfolgreich war, bis die japanische Konkurrenz mit ihren Vektorrechnern in den 90er Jahren spürbar wurde [29]. Aber schon 1982 machte Cray Research den Schritt zu Mehrprozessor-Vektorrechnern und damit in die Parallelverarbeitung. Damit ging auch die rechtzeitige Entwicklung zu offenen Systemen einher, wie sie sich in Unix-basierten Betriebssystemen und der Unterstützung der TCP/IP-Kommunikation manifestiert – zwei innovative Strömungen, die wie das Internet und WWW aus der Welt der Wissenschaft und Forschung kommend die Entwicklung des Com-

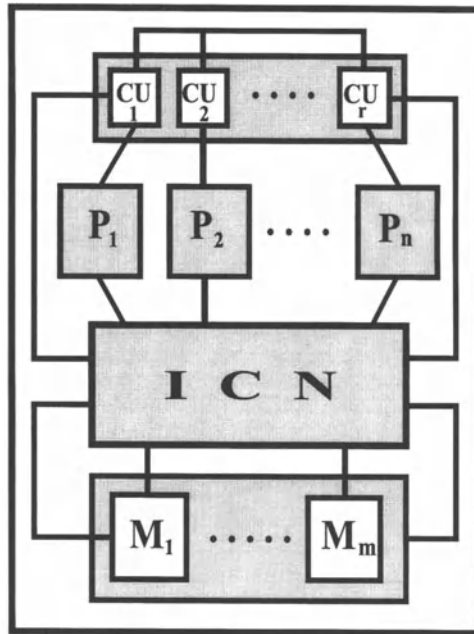


Abb. 2: Struktur der Parallelrechner mit gemeinsamem Hauptspeicher (CU_i = Leitwerk (Control Unit); P_k = paralleler Prozessor; ICN = Verbindungsnetzwerk (Interconnection Network); M_n = Hauptspeicherbank)

puting auf einer breiten Wellenfront, von den Workstations bis zu den Netzwerken, in die Zukunft getragen haben.

Die Zukunft wird auf lange Zeit den Parallelrechnern gehören, und in der Tat läßt sich derzeit keine realistische technische Alternative erkennen. Dabei stehen die Architekturen mit gemeinsamem Hauptspeicher (Bild 2) heute neben den Parallelrechnern mit verteiltem Speicher (Bild 3), deren Stärke primär auf der Leistungssteigerung der Mikroprozessoren und der Integrationsdichte der Speicherchips beruht.

Die Zusammenführung beider Konzepte in die aufkommenden massiv-parallelen SMP-Cluster-Architekturen erst macht den Sprung über die heute von den Parallelrechnern angepeilte Leistungshürde der Teraflops (1000 Milliarden Gleitkomma-Operationen pro Sekunde) möglich (Bild 4); diese Hürde wird gerade von den für das ASCI-Programm konzipierten Parallelrechnern genommen. Viele Ideen konnten schon zunächst konzeptionell, zunehmend aber auch durch Implementierungen wirkungsvoll umgesetzt werden. Ein gravierendes Problem aber ist das Programmiermodell: Während vom sequentiellen Monoprozessor herkommend bei den Multiprozessoren,

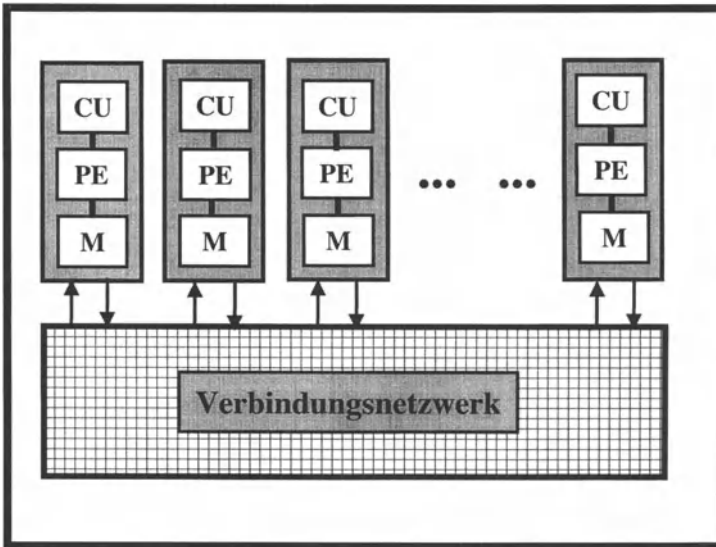
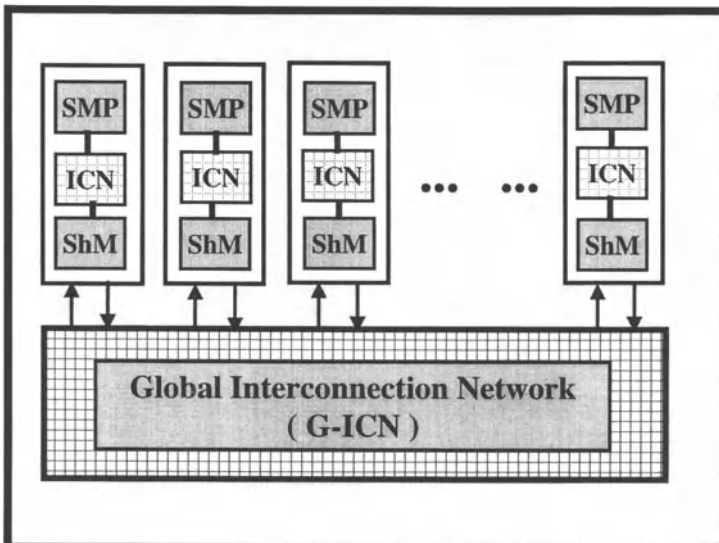


Abb. 3: Struktur der Parallelrechner mit verteiltem Speicher (CU = Leitwerk (Control Unit); PE = Prozessorelement; M = (lokaler) Hauptspeicher)

Abb. 4: Struktur der SMP-Cluster-Architekturen massiv-paralleler Rechner (SMP = Symmetric Multiprocessors; ICN = Verbindungsnetzwerk innerhalb des SMP-Knotens; ShM = SMP-Shared Memory; G-ICN = globales Verbindungsnetzwerk zwischen den SMP-Knoten)



und das heißt auch noch bei den Parallel-Vektor-Prozessoren, der gemeinsame Hauptspeicher für das Programm und den Programmierer *einen* logischen Adreßraum bot, forderte der Übergang zu massiv-parallelen Rechnern mit verteiltem Hauptspeicher und die damit qualitativ und quantitativ neue Aufgabe der Datenkommunikation über komplexe Verbindungsnetzwerke zwischen den Prozessoren zunächst auch den Verlust des einheitlichen Adreßraumes und damit die explizite Programmierung der Kommunikationsschritte, die das nunmehr parallele Programm mit der Arbeitsverteilung verlangte: Das sogenannte Message Passing mit dem Standard MPI wurde zum zwar leistungsfähigen, aber komplizierten Programmiermodell für heutige Parallelrechner. Forschung und Entwicklung arbeiten daher an der Rückgewinnung des globalen Adreßraumes für Parallelrechner [30]: „virtueller“ gemeinsamer Speicher!

Der Entwurf paralleler Algorithmen bleibt die große Herausforderung an die Mathematik und Informatik. Die Schwierigkeiten gründen in den qualitativ und quantitativ neuartigen Anforderungen an die infolge der Arbeitsverteilung auf die parallelen Prozessorelemente nunmehr notwendige Kommunikation und die dadurch bedingten engen Wechselbeziehungen zwischen Rechnertopologie und Algorithmus. Es ist unmittelbar einsichtig, daß die unterschiedlichen Datenflußstrukturen der Algorithmen (z. B. der Fast Fourier Transform und der Mehrgittermethoden) sich nicht gleichermaßen gut auf ein fest vorgegebenes Verbindungsnetzwerk zwischen den Prozessoren abbilden lassen. Hinzu tritt das Problem der Lastbalance. Große Programme setzen sich aber in der Regel aus sehr verschiedenen Algorithmen zusammen; sie sind algorithmisch heterogen. Die Erfahrungen mit den verschiedenen Supercomputer-Architekturen und ihren Stärken und Schwächen, die technologischen Hindernisse für größere Leistungssprünge bei der Vektorverarbeitung, die große Schwankungsbreite in den Leistungsdaten für Algorithmen auf verschiedenen Parallelrechnern führen so zur Idee des *heterogenen* Rechnens und der *heterogenen* Computer [31].

3. Komplexität und Berechenbarkeit

Der Rechnermarkt ist gerade in den letzten Jahren durch erhebliche strukturelle Turbulenzen gekennzeichnet. Schon H. H. Goldstine hat gesagt: „*The history of computers is littered with Australopithecans, the deviant apes that anthropologists keep finding: little evolutionary lines that don't lead anywhere*“ [2, S. 267]; und in der Computerindustrie ist ein lange befürchteter und anhaltender „Shake-out“ im Gange. Technologie und globaler Wettbewerb

führen zu drastischem Preisverfall bei Workstations und PCs; das rigide Gebäude der Monopole in der Kommunikation wird abgetragen, neue Kräfteverhältnisse etablieren sich national und international [32]. Gleichzeitig steigern Technologie, Informatik und Mathematik die weltweite Expansion des Internet, die Zahl der angeschlossenen Rechnerknoten und der Client-Rechner sowie ihre Leistungsfähigkeit in exponentiellen Skalen – die TeraFlops (Billion Gleitkomma-Operationen pro Sekunde) werden gerade von den neuen Parallelrechnern markiert –, und eine Grenze dieser Entwicklung ist nicht in Sicht [32–34]. Von daher suggeriert die erlebte Geschichte des Computers – die Durchdringung unserer Gesellschaft und ihre jetzt schon sehr weitgehende Abhängigkeit vom Computer, der Siegeszug des PC im Verbund mit dem exponentiellen Wachstum des Internet, die großen Leistungssprünge der Supercomputer – mit der Ubiquität des Computers, wie bereits vorne festgestellt, seine anscheinende Omnipotenz.

3.1 Effiziente Algorithmen und harte Probleme

Doch existieren fundamentale Grenzen: Schon als Entwurf und Wirklichkeit des Computers noch fern waren, lieferten abstrakte Maschinenmodelle und Konzepte der Berechenbarkeit darin tiefe Einsichten [35, 36]. Die Fortschritte in der Computertechnologie und -architektur einerseits und in der Entwicklung sequentieller und paralleler Algorithmen seit den 50er Jahren andererseits haben diese Grenzen zunächst vergessen lassen. Schöne und effiziente numerische Algorithmen konnten geschaffen werden, deren Zeitgewinne mit denen der Informationstechnik leicht Schritt halten und deren Effekte somit multiplizieren konnten. Hier sei nur an die Entwicklung bei der Fourier-Transformation [37] von der DFT mit dem Zeitaufwand $O(N^2)$ über die sequentielle Fast-Fourier-Transformation mit $O(N \log N)$ zur parallelen FFT mit $O(\log N)$ und an den Durchbruch bei der Lösung partieller Differentialgleichungen durch die Mehrgittermethoden erinnert [38].

Auch für nichtnumerische Fragestellungen gelangen effiziente, auch parallele Algorithmenentwürfe, die ermutigten, kompliziert erscheinende Probleme, zum Beispiel aus der Logistik, anzugehen, hatte doch Euler schon 1736 durch die Übertragung des angeblich von Kant, wohl aber eher vom damaligen Danziger Bürgermeister gestellten „Königsberger Brückenproblems“ in die graphentheoretische Darstellung (Bild 5) den Weg zu einfachen Lösungen gezeigt [39, 40]. Doch dieser Anschein trög. Schon die dem Königsberger Brückenproblem so sehr ähnlich anmutende Frage nach einem geschlossenen Rundweg in einem Graphen, dessen Route aber nur genau ein-

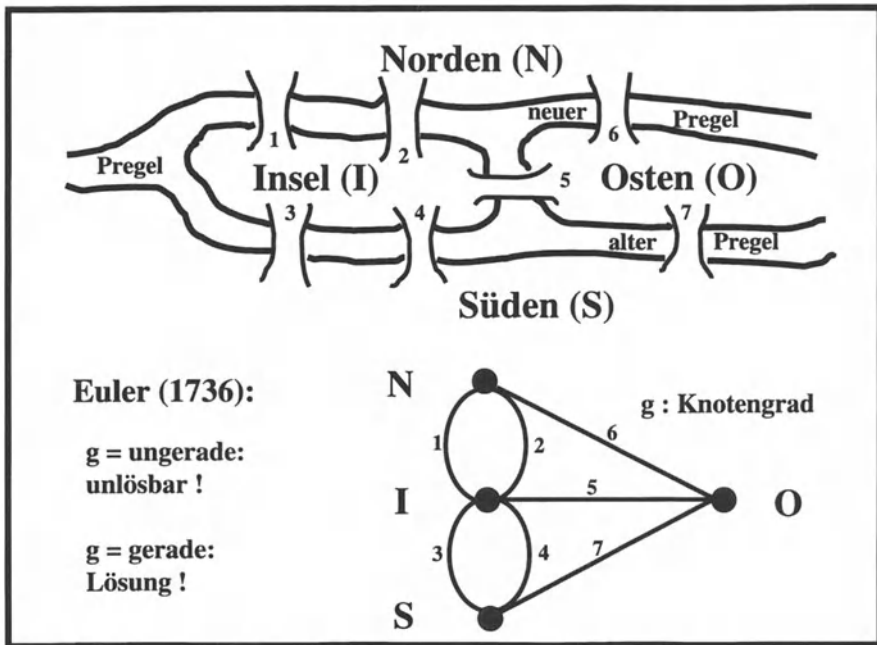


Abb. 5: Das „Königsberger Brückenproblem“ und Eulers graphentheoretische Darstellung zu dessen Lösung über den Grad g der Knoten

mal durch jeden der N Knoten dieses Graphen geht (Bild 6), führte auf das Gebiet der „harten Probleme“ (*intractable problems*).

Für deren Lösung lassen sich bis heute keine „vernünftigen“ Algorithmen finden, die von der (hyper)exponentiellen Zahl der Berechnungsschritte, welche die direkte Lösungsmethode der Abprüfung aller Möglichkeiten ergibt, zu einer – wie hier von der Knotenzahl – nur polynomial abhängenden Rechenzeit (*tractable problems*) führten. Dieses Problem der geschlossenen Rundtour, des Hamiltonschen Weges oder Hamilton-Zyklus, ergibt für die Lösungsschritte: $T(N) = O(N!)$. Damit explodiert der Lösungsaufwand für solche nichtpolynomialen Probleme aber bereits für vergleichsweise kleine N .

Daß von diesen grundsätzlichen Schranken für die Problemlösung nicht nur „akademische“ Fragestellungen betroffen sind, zeigt das Travelling-Salesman-Problem und seine durch logistische Zusatzbedingungen gesteigerten diffizilen Optimierungsvarianten [41]. Für die Praxis helfen bei diesen harten Problemen nur Heuristiken, bei denen sich die schwierige Frage stellt, wie nahe sie den exakten Lösungen kommen können [42], so daß gelegentlich Umberto Eco

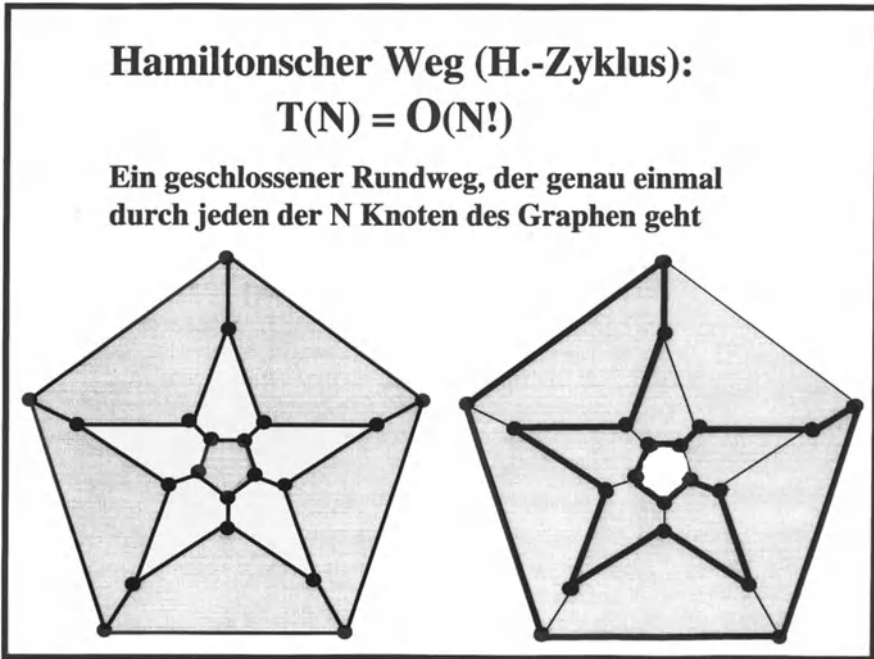


Abb. 6: Hamiltonscher Weg (Hamiltonscher Rundweg oder Zyklus) als hartes Problem der Algorithmik mit der Zeitkomplexität $T(N) = O(N!)$; links: Ausgangsgraph aus N Knoten und M Kanten; rechts: Hamiltonscher Rundweg (durch die dicken Kanten markiert)

angebracht erscheint: „Jedes komplexe Problem hat eine einfache Lösung – und die ist falsch!“

Der Algorithmenentwurf führte so spätestens in den 60er Jahren in die „Komplexitätstheorie“, d. h. in das neue Gebiet der Analyse von mathematisch definierbaren Problemen hinsichtlich des Bedarfes möglicher Lösungsalgorithmen an den Ressourcen Rechenzeit und Speicherplatz sowie – bei parallelen Algorithmen zusätzlich – Kommunikation. Diese funktionale Abhängigkeit solchen Ressourcenbedarfes von der Größe der bestimmenden Eingangsdaten heißt in der Algorithmik: Komplexität, also Zeit-, Speicher- und Kommunikationskomplexität [35, 43, 44]. Sie hat sich zu einer bedeutenden Disziplin der theoretischen Informatik entwickelt, die sehr bald mit grundsätzlichen Fragen konfrontiert wurde, wie sie schon in den Arbeiten von Alan Turing aus den 30er Jahren, vor allem in seinem Konzept der Turing-Maschine und insbesondere in dem nichtentscheidbaren Halte-Problem, verborgen waren.