

FORSCHUNGSBERICHTE DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN

Nr. 1101

Herausgegeben

im Auftrage des Ministerpräsidenten Dr. Franz Meyers

von Staatssekretär Professor Dr. h. c. Dr. E. h. Leo Brandt

DK 532.584  
620.179.16

*Dr.-Ing. Karl Wolters*

*Laboratorium für Ultraschall an der Technischen Hochschule Aachen  
(Leiter : Dr. Reimar Pohlman)*

Über die Ultraschall-Extinktion in Suspensionen  
und ihre Anwendung zur Messung  
geringer Konzentrationen



WESTDEUTSCHER VERLAG · KÖLN UND OPLADEN 1963

ISBN 978-3-663-03949-5      ISBN 978-3-663-05138-1 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-05138-1

Verlags-Nr. 011101

© 1963 by Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen

Gesamtherstellung: Westdeutscher Verlag

# Inhalt

|   |    |
|---|----|
| Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen .....   | 6  |
| 1. Problemstellung .....  | 9  |
| 2. Theorie der Ultraschallextinktion in Suspensionen .....                                      | 11 |
| 2.1 Berechnung der Mitschwingvorgänge von Suspensionspartikeln im Schallfeld .....              | 12 |
| 2.2 Überprüfung der Theorien von SEWELL und LAMB auf ihre Verwendbarkeit für Suspensionen ..... | 17 |
| 2.3 Einführung der konzentrationsabhängigen Viskosität .....                                    | 21 |
| 3. Extinktionsmessungen an Suspensionen mit kugelförmigen Partikeln ...                         | 26 |
| 3.1 Echo-Impuls-Meßverfahren .....  | 26 |
| 3.2 Die Herstellung von Suspensionen mit kugelförmigen Partikeln .....                          | 35 |
| 3.3 Ergebnisse .....  | 42 |
| 3.31 Literaturübersicht über die Extinktionsmessungen in Suspensionen .....                     | 42 |
| 3.32 Eigene Messungen .....   | 44 |
| 3.321 Die Absorption im Bereich der durch Viskosität verursachten Verluste .                    | 45 |
| In Abhängigkeit von:  |    |
| 3.3211 Konzentration .....  | 45 |
| 3.3212 Teilchengröße .....  | 46 |
| 3.3213 Verhältnis der Dichten .....   | 49 |
| 3.3214 Häufigkeitsverteilung .....  | 50 |
| 3.3215 Temperatur .....   | 52 |
| 3.322 Messungen im Bereich der RAYLEIGH-Streuung .....  | 53 |
| In Abhängigkeit von:  |    |
| 3.3221 Konzentration .....  | 54 |
| 3.3222 Teilchengröße .....  | 56 |
| 3.3223 Frequenz .....   | 56 |
| 3.3224 Temperatur .....   | 57 |
| 3.3225 Häufigkeitsverteilung .....  | 57 |
| 3.323 Tabellarische Zusammenstellung der Meßergebnisse .....                                    | 58 |
| 4. Technische Anwendung am Beispiel der Papiersuspension .....                                  | 60 |
| 4.1 Messungen an Papiersuspensionen .....   | 61 |
| 4.11 Literaturübersicht .....   | 61 |
| 4.12 Eigene Messungen .....   | 61 |
| 4.2 Störungseinflüsse im technischen Betrieb und ihre Kompensation .....                        | 64 |
| 4.3 Vorschläge für industriell verwendbare Meßanordnungen .....                                 | 69 |
| 5. Zusammenfassung .....  | 72 |
| Literaturverzeichnis .....  | 73 |

## Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| A                                     | Auftrieb  |
| D                                     | Durchmesser   |
| G                                     | Gewicht   |
| H                                     | Höhe  |
| J                                     | Schallintensität  |
| L                                     | Drehmoment  |
| Q                                     | Durchflußvolumen pro Zeiteinheit  |
| R                                     | Reflexionsfaktor  |
| Re                                    | Reynoldssche Zahl   |
| T                                     | Periodendauer   |
| $T_i$                                 | Impulsperiodendauer   |
| U                                     | Spannung  |
| $X_p$                                 | Schwingungsamplitude einer Partikel   |
| $X_0$                                 | Schwingungsamplitude des Trägermediums  |
| $a = 20 \log R$                       | Reflexionsdämpfung  |
| b                                     | Beweglichkeit   |
| c                                     | Schallgeschwindigkeit   |
| d                                     | Abstand   |
| f                                     | Frequenz  |
| $f_i$                                 | Impulsfolgefrequenz   |
| g                                     | Erdbeschleunigung   |
| h                                     | Häufigkeit  |
| k                                     | Volumenkonzentration = Volumenteil der suspendierten Teilchen pro Volumeneinheit der Suspension |
| $k_g$                                 | Massenkonzentration = Masse der suspendierten Partikeln pro Volumeneinheit der Suspension       |
| $k = \frac{2\pi}{\lambda}$            | Wellenzahl  |
| m                                     | Masse einer Partikel  |
| n                                     | Anzahl suspendierter Teilchen pro Volumeneinheit der Suspension                                 |
| p                                     | Schallwechseldruck  |
| $q = \frac{\beta^2 r^2}{1 + \beta r}$ | Parameter   |
| r                                     | Partikelradius  |
| t                                     | Zeit  |
| $t_i$                                 | Impulsdauer   |
| $t_s$                                 | Sedimentationsdauer   |
| w                                     | Strömungsgeschwindigkeit  |
| x                                     | Weglänge in Ausbreitungsrichtung  |
| $z_0$                                 | Nahfeldlänge  |
| $\alpha$                              | Extinktion (Absorption + Streuung)  |

|   |                              |
|---|------------------------------|
| $\beta = \sqrt{\frac{\omega \rho}{2 \eta}}$ | Parameter                    |
| $\gamma$                                    | Parameter                    |
| $\eta$                                      | dynamische Viskosität        |
| $\lambda$                                   | Wellenlänge                  |
| $\mu = \frac{\eta}{\rho}$                   | kinematische Viskosität      |
| $\nu$                                       | ganze Zahl                   |
| $\rho$                                      | Dichte des Trägermediums     |
| $\rho_p$                                    | Dichte des Partikelmaterials |
| $\sigma = \frac{\rho_p}{\rho}$              | Verhältnis der Dichten       |
| $\tau$                                      | Zeitkonstante                |
| $\psi$                                      | Winkel                       |
| $\omega = 2 \pi f$                          | Kreisfrequenz                |

# 1. Problemstellung

Die in verschiedenen Bereichen der industriellen Verfahrenstechnik wichtige Messung und Regelung der Konzentration von Suspensionen, worunter der Volumenanteil der aufgeschlämmten Partikeln im Verhältnis zum Gesamtvolumen zu verstehen ist, wird nach dem heutigen Stande der Meßtechnik stets auf der Basis von Viskositätsmessungen durchgeführt.

Nach einer von EINSTEIN [9] angegebenen Gl. (1), die aus der Änderung des Energieumsatzes bei Einbringen kugelförmiger Teilchen in eine stationär und laminar strömende Flüssigkeit folgt:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + f(k) \quad , \quad (1)$$

steigt die Viskosität  $\mu$  einer Suspension gegenüber der Viskosität  $\mu_0$  der Trägersubstanz mit wachsender Konzentration  $k$  an. Unter der Voraussetzung einer stark verdünnten Suspension ( $k < 5\%$ ) wird für starre, kugelförmige, nicht solvatierte Suspensionspartikeln näherungsweise ein linearer Zusammenhang errechnet, da dann die Teilchen relativ große Abstände voneinander haben und sich gegenseitig nicht beeinflussen:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 2,5 k \quad . \quad (2)$$

Aus Gl. (2) wird ersichtlich, daß die Bestimmung der Konzentration  $k$  nach der erwähnten Viskositätsmethode bei großer Verdünnung an der möglichen Meßgenauigkeit scheitern muß.

Man errechnet zum Beispiel, daß für  $k = 1\%$  die Viskosität der Suspension nur um den Faktor  $2,5 \cdot 10^{-2}$  größer ist als die der Trägersubstanz. Eine Konzentrationsbestimmung mit einer Genauigkeit von  $1\%$  würde hier die Viskositätsmessung mit einer Genauigkeit von 0,25 Promille erfordern. Weitere Werte für die Viskosität verdünnter Suspensionen gibt die nachfolgende, aus Gl. (2) errechnete Tabelle:

| Konzentration $k$   | 1%    | 2%    | 3%    | 4%   | 5%    |
|---------------------|-------|-------|-------|------|-------|
| relative Viskosität | 1,025 | 1,050 | 1,075 | 1,10 | 1,125 |

Steigt die Konzentration von  $1\%$  auf  $2\%$ , also um  $100\%$ , so wird die Viskosität nur um  $2\%$  größer.

Die Viskosimetermethode versagt bei geringer Konzentration. Man ist bislang auf die Gewichtsanalyse, also das Abfiltern, Trocknen und Wägen der in einem

bekanntem Volumen suspendierten Partikeln, angewiesen. Diese ist für kontinuierlich ablaufende Fertigungsprozesse, insbesondere regelungstechnisch, nicht anwendbar wegen ihres hohen Zeitaufwandes (mindestens 30 Minuten für einen Meßwert).

Da die Extinktion des Ultraschalls in Suspensionen eine Funktion der Konzentration ist, scheint sich ein neuer Weg zu zeigen, wenn die Viskosimetermethode im Bereich verdünnter Suspensionen durch ein Ultraschallverfahren ersetzt wird. Ein solches Verfahren und auch die dafür erforderlichen theoretischen und experimentellen Untersuchungen müssen grundsätzlich für alle Zweiphasensysteme gültig sein, die etwa in das folgende Schema einzuordnen sind:

| Disperse Phase<br>(suspendierte Partikeln) | Dispersionsmittel (Trägersubstanz) |                 |           |
|--|------------------------------------|-----------------|-----------|
|  | fest                               | flüssig         | gasförmig |
| fest                                       | Legierungen                        | Suspensionen    | Staube    |
| flüssig                                    | Trocknemulsionen                   | Emulsionen      | Nebel     |
| gasförmig                                  | Xerogele<br>(Schaumstoffe)         | Gasdispersionen | –         |

Dabei sind stets die speziellen Randbedingungen zu beachten, die in Einzelfällen zu sehr unterschiedlichen Extinktionswerten führen, wenn auch das grundsätzliche Verhalten in Abhängigkeit von den meisten Parametern vergleichbar ist.

Es erscheint wenig sinnvoll, alle genannten Systeme gleichzeitig zu bearbeiten. Die im folgenden erörterten Untersuchungen beschränken sich auf Suspensionen und greifen als Spezialfall von akutem technischen Interesse Papiersuspensionen heraus. Gasdispersionen treten dabei als Störgrößen auf und werden, soweit erforderlich, auch behandelt.

Die technische Anwendung der Ergebnisse läßt sich verhältnismäßig leicht auch auf die Aerosolmeßtechnik und auf Emulsionen (z. B. Milchuntersuchungen) ausdehnen.



## 2. Theorie der Ultraschall extinction in Suspensionen

Eine Anzahl von theoretischen Untersuchungen über die Schall extinction in Zweiphasensystemen findet sich in der einschlägigen Literatur. Diese sollen im folgenden kurz referiert werden. Dabei sind die angeführten Formeln stets in ihrer Nomenklatur vereinheitlicht worden und durch elementare Umrechnungen so dargestellt, daß sie untereinander vergleichbar sind.

Wie weiter unten ausgeführt wird, beziehen sich die in der Literatur nachweisbaren theoretischen Ergebnisse meist nicht unmittelbar auf Suspensionen, sondern sind entweder allgemein gültig oder für spezielle Zweiphasensysteme, z. B. Aerosole, errechnet. Bei den folgenden Betrachtungen ist daher primär die Frage zu untersuchen, inwieweit sie auf Suspensionen anwendbar sind und welche speziellen Randbedingungen beachtet werden müssen.

Die Schwächung der Schallintensität  $J$  in einer ebenen Welle folgt im allgemeinen dem Gesetz

$$J = J_0 e^{-2\alpha x} \quad . \quad (3)$$

Für den Schallwechseldruck gilt entsprechend

$$p = p_0 e^{-\alpha x} \quad , \quad (4)$$

wobei  $x$  die durchlaufene Wegstrecke in Ausbreitungsrichtung ist. Den Schwächungskoeffizienten  $\alpha$  kann man für die Verhältnisse in Suspensionen aufteilen nach

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_d + \alpha_s \quad . \quad (5)$$

Darin bedeuten:

$\alpha_0$  den Absorptionskoeffizienten der Trägerflüssigkeit,

$\alpha_d$  den Koeffizienten für die durch dynamische Vorgänge an den Suspensionspartikeln entstehenden Reibungsverluste,

$\alpha_s$  den Koeffizienten für die Verluste durch Streuung von Schallenergie an den Partikeln.

Als Schall extinction  $\alpha'$  einer Suspension soll für die folgenden Berechnungen und Messungen stets die Summe von  $\alpha_d$  und  $\alpha_s$  definiert werden:

$$\alpha' = \alpha_d + \alpha_s \quad . \quad (6)$$

Die Absorption des Trägers ist also dabei stets von der Summe der auftretenden Schallschwächungen in Abzug gebracht.

## 2.1 Berechnung der Mitschwingvorgänge von Suspensionspartikeln im Schallfeld

Für die Beurteilung von Schallvorgängen in Suspensionen ist es zunächst wichtig, sich einen Überblick zu verschaffen, ob und in welchem Ausmaß die suspendierten Partikeln an den Schwingungsbewegungen des Trägermediums teilnehmen.

Durch Betrachtung eines einzelnen suspendierten Teilchens in einem gasförmigen Träger haben BRANDT, FREUND und HIEDEMANN [5] diese Frage für Aerosole untersucht. Sie wendeten das Gesetz von STOKES über die langsame Bewegung einer Kugel im zähen Medium an auf ein kugelförmiges Festkörperpartikelchen in einem schwingenden, gasförmigen Medium. Das Teilchen wird dabei als klein gegen die Schallwellenlänge angenommen und soll keine äußeren Kräfte erfahren. Die Voraussetzungen werden weiter unten geprüft.

Es ergibt sich:

$$\frac{X_p}{X_0} = [(mb\omega)^2 + 1]^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Dabei sind

$X_0; X_p$  die Schwingungsamplituden der Trägerflüssigkeit bzw. der Partikel

$m$  die Masse der Partikel

$\omega = 2\pi f$  die Schallfrequenz

$b$  die Beweglichkeit nach dem Gesetz von STOKES:

$$b = (6\pi r\eta)^{-1} = (6\pi r\rho\mu)^{-1} \quad (8)$$

für ein kugelförmiges Teilchen mit dem Radius  $r$  und der Dichte  $\rho_p$ .  $\eta$  ist die dynamische,  $\mu$  die kinematische Zähigkeit des Trägers und  $\rho$  seine Dichte.

$$\eta = \rho\mu \quad (9)$$

Bei der Betrachtung von Suspensionen sind die gesamten Voraussetzungen neu zu überprüfen. Das Gesetz von STOKES ist in Flüssigkeiten gültig, solange die Reynoldssche Zahl

$$\text{Re} = \frac{2rw\rho}{\eta} \leq 0,4 \quad (10)$$

bleibt. Darin sind  $w$  die Strömungsgeschwindigkeit,  $\rho$  die Dichte des strömenden Mediums und  $\eta$  seine Viskosität. Betrachtet man die Amplitude der Schallschnelle  $\hat{v}$ , die mit der Schallintensität  $J$  und der Schallgeschwindigkeit  $c$  durch die Beziehung:

$$v = \sqrt{\frac{2J}{\rho c}} = w \quad (11)$$

verknüpft ist, hier als die höchste auftretende Strömungsgeschwindigkeit,

so kann man aus der Gleichsetzung von Gl. (10) und Gl. (11) die zugeschnittene Größengleichung

$$J \leq 0,02 \frac{\eta^2 c}{r^2 \rho}; \quad \frac{J}{W/\text{cm}^2} \leq \frac{12 \cdot 10^{-8}}{\left(\frac{2r}{\text{cm}}\right)^2} \quad (12)$$

errechnen, wenn man die Viskosität von Wasser  $\eta = 0,01 \frac{\text{g}}{\text{cm/s}}$  (bei 20°C) die zugehörige Dichte  $\rho \approx 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  und die Schallgeschwindigkeit  $c \approx 1,5 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  einsetzt. Die Gültigkeit des Stockesschen Gesetzes hängt also hier von der Schallintensität ab. Nimmt man diese für Meßzwecke nicht höher als  $10^{-2} \frac{W}{\text{cm}^2}$  an, so gelten die folgenden Betrachtungen bis zu einer Teilchengröße von 34  $\mu\text{m}$ . Bei höheren Schallintensitäten wird es zu Wirbelbildungen an den Partikeln kommen, die auch bezüglich der zu erwartenden Absorptionsverluste einer Berechnung unmittelbar nicht mehr zugänglich sind. Die in der Hydrodynamik allgemein für  $\text{Re} > 0,4$  angewandte, experimentell ermittelte Kurve des Widerstandsbeiwertes als Funktion der Reynoldsschen Zahl ist hier nicht verwendbar. Sie gilt für stationäre Strömungen und kann auf Schwingungsvorgänge nicht angesetzt werden. Da bei Überschreiten der durch Gl. (12) angegebenen maximalen Schallintensität die Wirbelbildung zunächst während des zeitlichen Maximums der Schallschnelle auftritt und dort stets am größten sein wird, kommt es zur nichtlinearen Abbremsung der Teilchenschwingung, die nichtlineare Verzerrungen zur Folge hat.

Unter der gemachten Voraussetzung geringer Schallintensität ist ferner zu berücksichtigen, daß bei Anwendung des Gesetzes von STOKES die Beweglichkeit  $b$  frequenzabhängig ist nach der von LORENTZ [16] abgeleiteten Beziehung

$$\bar{b} = [6\pi r \eta (-1 + \bar{\beta} r - \frac{1}{6} \bar{\beta}^2 r^2)]^{-1} \quad (13)$$

$$\bar{\beta} = -(1+i) \sqrt{\frac{\omega \rho}{2 \eta}} = -(1+i)\beta \quad (14)$$

In Aerosolen und für Frequenzen bis zu ca. 40 kHz kann

$$\beta r < 1 \quad (15)$$

gesetzt werden, so daß Gl. (13) in die stationäre Form

$$|b| = (6\pi r \eta)^{-1} \quad (8)$$

nach dem Gesetz von STOKES übergeht und die Gl. (7) gilt. Für Suspensionen im Ultraschallgebiet ist die Bedingung Gl. (15) nicht mehr gegeben, da der Quotient  $\frac{\rho}{\eta}$  für Flüssigkeiten um den Faktor 10 höher liegt als für Gase, da ferner die Teilchengrößen in Suspensionen im allgemeinen wesentlich höhere Werte haben

als in Aerosolen und da die folgenden Betrachtungen auch für höhere Frequenzen als 40 kHz gültig sein sollen.

Es ist also eine Korrektur erforderlich, die durch Einführung der frequenzabhängigen Beweglichkeit nach Gl. (13) erfolgen soll. Darin ist

$$\bar{b} = \{6\pi r \eta [(-1 - \beta r + \frac{1}{3} \beta^2 r^2) - i(\beta r - \frac{1}{3} \beta^2 r^2)]\}^{-1}. \quad (16)$$

Der Imaginärteil von Gl. (16) berücksichtigt die mitschwingende Mediummasse. Er ist als Blindanteil nur für Einschwingvorgänge von Bedeutung. Wir erhalten

$$|b| = [6\pi r \eta (1 + \beta r - \frac{1}{3} \beta^2 r^2)]^{-1} \quad (17)$$

Mit dieser Korrektur folgt die Mitschwingbeziehung für Suspensionen zu

$$\frac{X_p}{X_0} = \left[ \left( \frac{4}{9} \sigma \frac{\beta r}{1 + \beta r} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

mit

$$\sigma = \frac{\rho_p}{\rho} \quad (\text{Verhältnis der Dichten}).$$

Als Beispiel ist in Abb. 1 das Mitnahmeverhältnis für eine Suspension von Polystyrolkugeln in Wasser in Abhängigkeit vom Teilchenradius aufgetragen. Wie aus Gl. (18) abzulesen ist, würde sich das gleiche Bild ergeben, wenn man auf der Abszisse statt des Partikelradius die Wurzel aus der Frequenz auftragen würde und den Radius als Parameter wählte, da für  $\beta r = \text{const}$  keine Veränderung von  $\frac{X_p}{X_0}$  folgt.

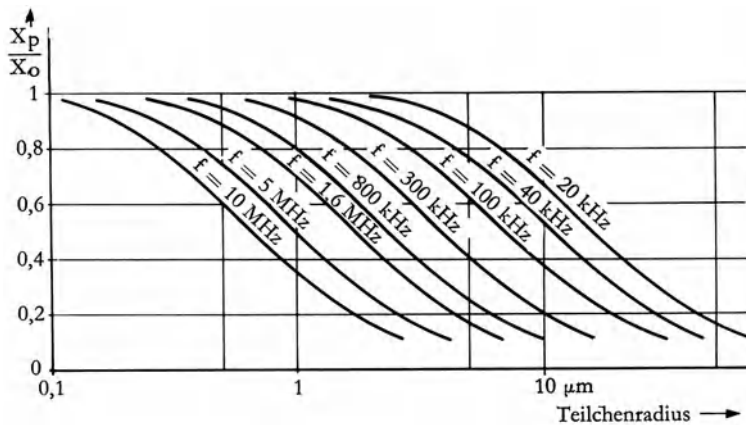


Abb. 1 Mitnahmeverhältnis  $\frac{X_p}{X_0}$  in Abhängigkeit von Teilchengröße und Frequenz für Polystyrol-Wasser-Suspensionen

Betrachtet man die Verhältnisse für konstante Frequenz, so schwingen kleine Teilchen vollständig mit, bei steigendem Radius bleiben die Teilchen hinter der Schwingungsbewegung der Trägersubstanz zurück und kommen nach Durchlaufen eines Übergangsbereiches ab einer bestimmten Teilchengröße zum Stillstand. Entsprechend gilt für konstanten Teilchenradius bei tiefen Frequenzen vollständiges Mitschwingen, mit wachsender Frequenz Durchlaufen eines Übergangsbereiches und bei hohen Frequenzen Stillstand der Partikeln. Wie aus Gl. (18) abzulesen ist, verschiebt sich das Übergangsbereich zu tieferen Frequenzen oder kleineren Teilchen, wenn  $\sigma = \frac{\rho_p}{\rho}$  wächst, wenn also die Teilchen gegenüber dem Trägermedium schwerer werden.

Anschaulich ausgedrückt bedeutet dies, daß ein Teilchen bei einer bestimmten Frequenz um so weniger mitschwingt, je größer und schwerer es ist.

Diese Mitschwingvorgänge haben ihren Einfluß auf die Verluste, die eine ebene Schallwelle in einer Suspension erleidet. Für das akustische Übergangsbereich, gekennzeichnet durch

$$0 < \frac{X_p}{X_0} < 1 \quad (19)$$

hat BRANDT [4] für Aerosole eine Gleichung für die Schallabsorption  $\alpha^*$  aufgestellt, welche ausschließlich die Verluste berücksichtigt, die sich bei Zurückbleiben der Partikelschwingung hinter der des Trägers durch Reibung ergeben. Bei Anwendung des Stokeschen Gesetzes ergibt sich:

$$2 \alpha^* = \frac{k_g}{\rho c} \frac{\left(1 - \frac{X_p}{X_0}\right)^2}{mb} = \frac{k_g mb \omega^2}{\rho c [(mb \omega)^2 + 1]} \quad (20)$$

Darin sind

|                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| $k_g = n \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_p$ | die Massenkonzentration <sup>1</sup> $k_g = k \rho_p$ |
| $k$                                  | die Volumenkonzentration                              |
| $n$                                  | die Partikelzahl pro Volumeneinheit                   |
| $\rho_p$                             | die Dichte des Partikelmaterials                      |
| $c$                                  | die Schallgeschwindigkeit.                            |

Nach den vorstehenden Ausführungen ist noch die Frequenzabhängigkeit der Beweglichkeit gemäß Gl. (17) einzuführen und man erhält:

$$2 \alpha^* = \frac{k_g}{\rho c} \frac{\omega}{\frac{9}{4 \sigma q} + \frac{4}{9} \sigma q} \quad (21)$$

<sup>1</sup> Dieser Begriff unterscheidet sich durch die Multiplikation mit der Erdbeschleunigung von der »Gewichtskonzentration«, die bei Papiersuspensionen gebräuchlich ist.

mit

$$\sigma = \frac{\rho_D}{\rho}; \quad q = \frac{\beta^2 r^2}{1 + \beta r}. \quad (22)$$

Aus Gl. (20) ersieht man, daß für

$$\frac{X_D}{X_0} = 1 \quad (23)$$

die Reibungsverluste verschwinden, da Partikeln und Trägersubstanz mit gleicher Amplitude und Phase schwingen. Für  $\frac{X_D}{X_0} = 0$  wird dagegen die Absorption nach Gl. (20) zu:

$$2 \alpha^* = \frac{k_g}{\rho c} \frac{1}{mb} \quad (24)$$

also frequenzunabhängig. Dies trifft nur für die durch das Zurückbleiben der Partikelschwingung hinter der Trägersubstanz bewirkten Verluste zu, die bei Stillstand der Teilchen ihren Grenzwert erreichen. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, treten jedoch noch verschiedene andere Absorptionsursachen auf, so daß die Gültigkeit von Gl. (24) stark eingeschränkt ist.

Die vorstehenden Betrachtungen setzen stets Kugelgestalt der suspendierten Teilchen voraus. Bei einer Suspension nicht kugelförmiger Partikeln im Schallfeld ist außer den genannten Erscheinungen noch eine Richtwirkung zu erwarten, wie POHLMAN [19] nachgewiesen hat.

Es tritt ein merkliches Drehmoment ein, wenn eine Dimension der Teilchen klein ist gegenüber den beiden anderen oder wenn zwei Dimensionen klein sind gegenüber der dritten. Die theoretische und experimentelle Untersuchung von POHLMAN bezieht sich auf den ersten Fall, also auf frei suspendierte »Rayleigh-Scheiben«.

Ist  $\bar{L}$  der zeitliche Mittelwert des Drehmoments, das auf diese Scheiben wirkt, und ist das negative Vorzeichen so zu verstehen, daß  $\bar{L}$  den Winkel  $\psi$  zwischen Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle und der Scheibennormalen zu verkleinern sucht, so folgt bei Anwendung der Betrachtung auf stehende Wellen und Berücksichtigung der Wanderung der Teilchen in die Schwingungsbäuche:

$$\bar{L} = - r^3 \rho_D (\sin 2 \psi) |\dot{x}_0|^2 \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_D}}{c_1 - \left(1 - \frac{\rho_D}{\rho}\right)}. \quad (25)$$

Darin bedeuten:

$r$  den Radius der Scheibe,

$\rho; \rho_D$  die Dichte des Trägermediums bzw. Partikelmaterials,

$|\dot{x}_0|$  die Schnelleamplitude des Trägers

$c_1$  Formkonstante (proportional dem Verhältnis Radius zu Dicke der Scheibe).

Das Drehmoment durchläuft in Abhängigkeit vom Verhältnis  $\sigma = \frac{\rho_D}{\rho}$  ein

Maximum und wird Null für  $\rho_p = \rho$ , also für den Fall einer Schwebesuspension. Wie später gezeigt wird, werden auch für kugelförmige Teilchen die durch Viskosität verursachten Schallverluste für diesen Fall theoretisch Null.

Aus den obigen Ergebnissen läßt sich leicht ersehen, daß für nicht kugelförmige Teilchen zusätzlich Absorptionsursachen entstehen müssen, da dem Richtmoment  $\bar{L}$  ein durch die Viskosität der Flüssigkeit bedingtes Reibungsmoment entgegenwirkt.

Die folgenden Betrachtungen sollen von dieser zusätzlichen, der Translationsbewegung der Teilchen überlagerten Richtwirkung absehen und sich auf kugelförmige Teilchen beschränken.

## 2.2 Überprüfung der Theorien von SEWELL und LAMB auf ihre Verwendbarkeit in Suspensionen

SEWELL [23] hat als erster die Schallextinktion durch kleine Teilchen in einem zähen Medium untersucht. Er setzte dabei voraus, daß

- a) die Teilchen im Schallfeld nicht mitschwingen,
- b) ihr Umfang klein gegen die Wellenlänge ist,
- c)  $\beta r \ll 1$  ist,
- d) kugelförmige Partikeln vorliegen.

Aus einer Betrachtung des Geschwindigkeitspotentials der durch eine suspendierte Partikel gestreuten ebenen Schallwelle unter Berücksichtigung der Viskosität erhält SEWELL für die nach Gl. (3) und (6) definierte Schallextinktion

$$2 \alpha' = n \pi r^2 \left[ 2 \sqrt{2} \frac{\sqrt{\mu \omega}}{c} + \frac{6\mu}{cr} + \frac{7}{9} \left( \frac{\omega r}{c} \right)^4 \right]. \quad (26)$$

Darin bedeuten:

- n die Zahl der Teilchen vom Radius r pro Volumeneinheit,  
c die Schallgeschwindigkeit,  
 $\omega = 2 \pi f$  die Schallfrequenz,  
 $\mu$  die kinematische Viskosität der Trägersubstanz.

Multipliziert man die drei Summanden in Gl. (26) aus, so ergeben sich drei Anteile der Extinktion:

$$2 \alpha_1 = 2 \sqrt{2} n \pi r^2 \frac{\sqrt{\mu \omega}}{c} \quad (27)$$

$$2 \alpha_2 = \frac{6 n \pi r \mu}{c} \quad (28)$$

$$2 \alpha_3 = \frac{7}{9} n \pi \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 r^6. \quad (29)$$

Dann bedeuten:

$2 \alpha_1$  den Koeffizienten für die Verluste, die durch turbulente Reibung entstehen,

$2 \alpha_2$  den Koeffizienten für die Strömungsverluste nach STOKES,

$2 \alpha_3$  den Koeffizienten für die von RAYLEIGH [20] berechneten Verluste durch Streuung von Schallenergie an den Partikeln.

Aus Gl. (18) und Abb. 1 ist zu ersehen, daß die obengenannte Voraussetzung a) für Suspensionen nicht zutrifft, da die Teilchen zum Teil in erheblichem Umfange mitschwingen. Voraussetzung c) trifft ebenfalls nicht zu, wie aus Abb. 2 abzulesen ist, in welcher Werte für den Parameter  $\beta r$  im interessierenden Bereich aufgetragen sind.

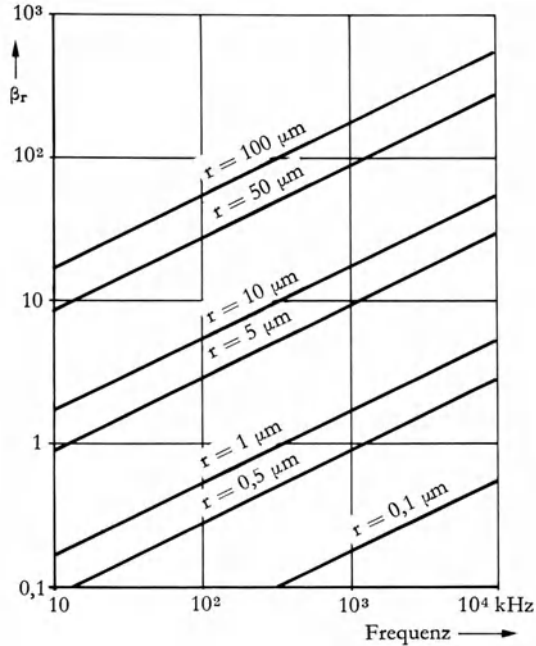


Abb. 2 Parameter  $\beta r$  für wäßrige Suspensionen als Funktion von Frequenz und Teilchenradius

$$\beta r = r \sqrt{\frac{\omega \rho}{2 \eta}}$$

Ein Vergleich von Gl. (18), Abb. 1 und Abb. 2, zeigt ferner, daß bei konstantem Partikelradius für eine Frequenz, die hoch genug ist, um Voraussetzung a) ( $\frac{X_p}{X_0} = 0$ ) zu gewährleisten, der Parameter  $\beta r$  bereits größer als 1 ist, so daß dann Bedingung c) nicht mehr erfüllt ist. Die von SEWELL abgeleitete Gleichung kann daher zwar für die Schallextinktion in Aerosolen im Hörschallgebiet verwendet werden, verliert aber für Suspensionen im Ultraschallgebiet ihre Gültigkeit.



Daß diese Gleichung trotzdem in eng begrenzten Bereichen anwendbar bleibt, zeigt folgende Überlegung:

Für  $\frac{X_p}{X_0} = 0$ , also am oberen Ende des akustischen Übergangsgebietes, ergibt

sich aus Gl. (24) die Form:

$$2 \alpha^* = \frac{k \sigma}{c m b} = \frac{9 k \rho_p \mu}{2 c r^2 \rho_p} = \frac{9 k \mu}{2 r^2 c}. \quad (30)$$

Nach Umrechnung geht ferner Gl. (28) über in die Form, die mit Gl. (30) identisch ist:

$$2 \alpha'_2 = \frac{6 \pi n \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot r \mu}{\frac{4}{3} \pi r^3 c} = \frac{9 k \mu}{2 r^2 c}. \quad (31)$$

Das bedeutet, daß die von SEWELL berechnete Extinktion mit der nach BRANDT ermittelten in einem bestimmten Bereich übereinstimmt. Wie oben angeführt, stellt diese Art der Verluste jedoch nur einen Teil der in Wirklichkeit zu erwartenden dar.

Eine erweiterte Ableitung nach der von SEWELL angewandten Berechnung des Geschwindigkeitspotentials der gestreuten Welle unter Berücksichtigung der Viskosität, die zu allgemeiner gültigen Ergebnissen führt, hat LAMB [15] gegeben. Er erweiterte die Theorie für den Fall, daß inkompressible Partikeln vorliegen, die im Schallfeld frei beweglich sind und an den Schwingungsbewegungen der Trägersubstanz teilnehmen können. Für eine Einzelpartikel erhält LAMB im allgemeinen Fall:

$$2 \bar{\alpha}' = \frac{4}{9} \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 r^4 \pi r^2 + \frac{4 \pi H'}{\left( \frac{\omega}{c} \right)^2} \quad (32)$$

mit 
$$H' = Re \left[ \frac{i A' (\rho_p - \rho)}{\rho_p - \rho + 3 \rho \frac{A'}{\left( \frac{\omega r}{c} \right)^3}} \right], \quad (33)$$

$$A' = \frac{-(3 + 3 i h r - h^2 r^2) \left( \frac{\omega r}{c} \right)^3}{2 h^2 r^2} \quad (34)$$

und 
$$h = (1 - i) \beta.$$

Die Gl. (32) resultiert aus Lösungen 0-ter und 1-ter Ordnung einer Besselfunktion der kugelförmigen Ausbreitung des Geschwindigkeitspotentials der gestreuten Welle, wobei Ausdrücke höherer Ordnung vernachlässigt sind.

Die Gl. (34) setzt dabei voraus, daß

$$r \frac{\omega}{c} = \frac{2 \pi r}{\lambda} \ll 1 \text{ ist,} \quad (35)$$

der Partikelumfang also klein gegen die Wellenlänge ist. Die Untersuchung gilt bis in das Gebiet der Rayleigh-Streuung, darüber hinaus liegen zahlreiche Berechnungen über die Störung des Schallfeldes durch eine Kugel in der Größenordnung der Wellenlänge oder größer aus der Akustik vor (z. B. STENZEL [27]). Bei Suspensionen kann man auch im Ultraschallgebiet bis zu 5 MHz ( $\lambda = 0,15$  mm) noch Teilchengrößen klein gegen die Wellenlänge annehmen, da größere Kugeln wegen ihrer schnellen Sedimentation keine stabilen Aufschlemmungen zulassen. Eine zweite Voraussetzung für Gl. (34) ist, daß

$$\beta r \geq 1 \quad \text{ist.} \quad (36)$$

Letzteres ist, wie Abb. 2 zeigt, für Suspensionen im Ultraschallgebiet gegeben. Für eine Suspension mit der Volumenkonzentration  $k$  (Volumen der suspendierten Partikeln dividiert durch Gesamtvolumen) sei zunächst eine lineare Addition der an jedem Einzelteilchen auftretenden Verluste angenommen. Dann ergibt sich die Schallextinktion zu

$$2\alpha' = \frac{k}{6} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 r^3 + \frac{k \left(\frac{\omega}{c}\right) (\sigma - 1)^2}{\frac{9}{4} \frac{1 + \beta r}{\beta^2 r^2} + \frac{4 \beta^2 r^2}{9(1 + \beta r)} \left(\sigma + \frac{1}{2} + \frac{9}{4 \beta r}\right)^2} = 2\alpha_s + 2\alpha_d \quad (37)$$

mit

$$\sigma = \frac{\rho_D}{\rho}; \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\mu}}. \quad (38)$$

Der erste Anteil in Gl. (37) stellt die Streuverluste (RAYLEIGH-Streuung) dar. Er ist bis auf einen Zahlenfaktor identisch mit den von SEWELL errechneten:

$$2\alpha_{s'} = \frac{7}{9} n \pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 r^6 = \frac{7}{12} k \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 r^3 \quad (39)$$

da  $k = n \frac{4}{3} \pi r^3$ .

Darin ist  $n$  die Zahl der Teilchen pro Volumeneinheit (Dimension:  $\text{cm}^{-3}$ ).

Der zweite Anteil in Gl. (37) wird gleich der nach BRANDT abgeleiteten Gl. (21), wenn man die Bedingung

$$\sigma \gg 1; \quad \frac{4}{9 \beta r} \ll \sigma$$

zuläßt, also Verhältnisse betrachtet, wie sie in Aerosolen vorliegen.

Da dann

$$\left(\sigma + \frac{1}{2} + \frac{9}{4 \beta r}\right)^2 \rightarrow \sigma^2; \quad (\sigma - 1)^2 \rightarrow \sigma^2$$

geht, wird

$$2 \alpha_a = \frac{k \frac{\omega}{c}}{\frac{9}{4} \frac{1 + \beta r}{\sigma^2} + \frac{4}{9} \frac{\beta^2 r^2}{1 + \beta r}} = 2 \alpha^*_{(21)}.$$

Die Frequenzabhängigkeit der Beweglichkeit ist in der obigen Gl. (37) berücksichtigt. LAMB rechnete das Gesetz von STOKES für die schwingende Bewegung um in

$$|W| = \frac{|w|}{|b|} = 2 \pi \rho r^3 \omega w \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\beta r} \right) i + \frac{3}{2 \beta r} \left( 1 + \frac{1}{\beta r} \right) \right]. \quad (39)$$

Daraus ergibt sich die Beweglichkeit

$$|b| = [6 \pi r \eta \{ 1 + \beta r + i(\beta r + \frac{2}{3} r^2 \beta^2) \}]^{-1}, \quad (40)$$

welche identisch ist mit der nach LORENTZ berechneten Gl. (16).

### 2.3 Einführung der konzentrationsabhängigen Viskosität

Nach den bisherigen Betrachtungen müßte die Extinktion als Summe aller Einzelverluste linear mit der Konzentration  $k$  ansteigen. Wie jedoch URIK [28] bei Messungen an Kaolin-Wasser-Suspension feststellte, trifft dieses experimentell nur bei kleinen Werten von  $k$  zu, während sich ein nichtlinearer Verlauf mit einem ausgeprägten Maximum zeigt, wenn man den Bereich bis zu  $k = 40\%$  ausdehnt. Als Grund für dieses Verhalten nimmt URIK ein in der Theorie nicht berücksichtigtes gegenseitiges Beeinflussen der schwingenden Teilchen an, wenn diese bei höherer Konzentration keinen großen Abstand mehr voneinander haben. Bei einer kritischen Betrachtung fällt auf, daß die Viskosität bisher stets als eine Konstante des Trägermediums eingeführt wurde. Wie jedoch bereits aus Gl. (1) hervorgeht, ändert sie sich mit der Konzentration. Dieses scheinbare Zäherwerden mit steigendem Gehalt an suspendierten Partikeln ist auf die gegenseitige Beeinflussung der Teilchen bei Strömungs- und Bewegungsvorgängen im Sinne einer Abbremsung zurückzuführen. Ist die Volumenkonzentration gering, so ist die Viskosität bei großem Abstand der Teilchen voneinander praktisch gleich der des Trägermediums. Mit steigender Teilchenzahl oder Konzentration ist dagegen die Änderung nicht mehr vernachlässigbar. Das muß sich auch auf die Schall-extinktion auswirken, und zwar auf den Anteil  $\alpha_a$ , der die dynamischen, durch Viskosität bedingten Verluste berücksichtigt. Es ist daher in die Gl. (37) die Konzentrationsabhängigkeit der Viskosität einzuführen.

HAPPEL [11] hat eine allgemeine Ableitung der Viskosität von Suspensionen in Abhängigkeit von der Konzentration gegeben, welche allgemeiner gehalten ist und die von EINSTEIN [9] aufgestellte Beziehung Gl. (1) erweitert. Er erhält:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 5,5 k \cdot f(k) \quad (41)$$

mit

$$f(k) = \frac{4 \gamma^7 + 10 - \frac{84}{11} \gamma^2}{10 (1 - \gamma^{10}) - 25(1 - \gamma^4)}. \quad (42)$$

Es ist

$$\gamma^3 = k, \quad (43)$$

daher folgt

$$f(k) = \frac{4 k^3 + 10 \sqrt[3]{k^2} - \frac{84}{11} k \sqrt[3]{k}}{10 \sqrt[3]{k^2} - 10 k^4 - 25 k \sqrt[3]{k^2} + 25 k^3}. \quad (44)$$

Führen wir diese Beziehung (44) in die Gl. (37) für die Extinktion in Suspensionen ein, so folgt für die Extinktion:

$$2 \alpha' = 2 \alpha_s + 2 \alpha_d; \quad (45)$$

mit

$$2 \alpha_s = \frac{k}{6} \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 r^3 \quad (46)$$

und

$$2 \alpha_d = \frac{k(\sigma - 1)^2 \left( \frac{\omega}{c} \right)}{\frac{9(1 + \beta_0 \epsilon r)}{4 \beta_0^2 \epsilon^2 r^2} + \frac{4 \beta_0^2 \epsilon^2 r^2}{9(1 + \beta_0 \epsilon r)} \left( \sigma + \frac{1}{2} + \frac{4}{9 \beta_0 \epsilon r} \right)^2}. \quad (47)$$

Hier sind:

$$\beta = \beta_0 \epsilon; \quad \beta_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2\mu_0}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\mu}} \quad (48)$$

und

$$\epsilon = \left( 1 + 5,5 k \frac{4 k^3 + 10 \sqrt[3]{k^2} - \frac{84}{11} k \sqrt[3]{k}}{10 \sqrt[3]{k^2} - 10 k^4 - 25 k \sqrt[3]{k^2} + 25 k^3} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (49)$$

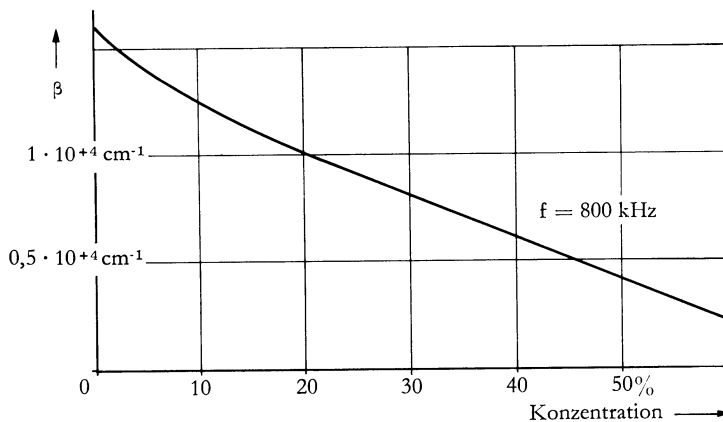


Abb. 3 Konzentrationsabhängigkeit des Parameters  $\beta$