DUV : Mathematik

Helga Tecklenburg

Stufen der Anordnung in Geometrie und Algebra

Helga Tecklenburg
Stufen der Anordnung in Geometrie und Algebra

Helga Tecklenburg

Stufen der Anordnung in Geometrie und Algebra

DUV Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

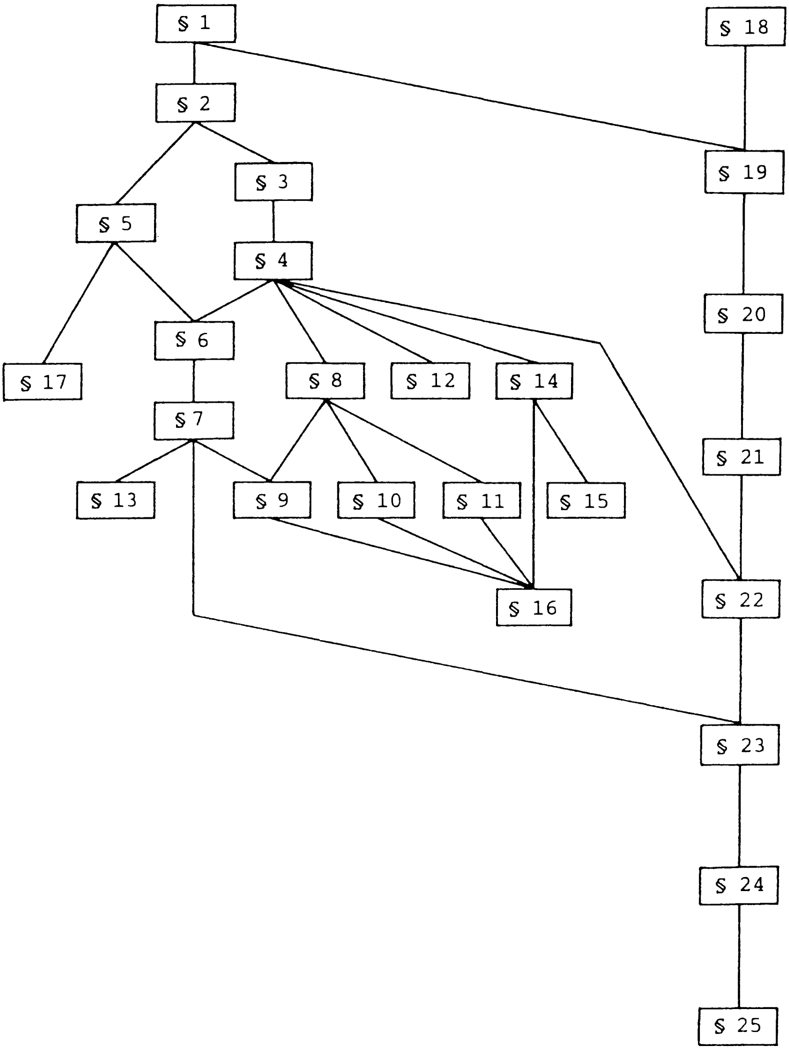
Die Deutsche Bibliothek — CIP-Einheitsaufnahme

Tecklenburg, Helga:
Stufen der Anordnung in Geometrie und Algebra /
Helga Tecklenburg. — Wiesbaden : Dt. Univ.-Verl.,
1992
(DUV : Mathematik)
Zugl.: Hannover, Univ., Habil.-Schr., 1988

ISBN 978-3-8244-2032-2 ISBN 978-3-663-14542-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-14542-4

INHALT

LEITFADEN



EINLEITUNG

Das unter historischem Aspekt bedeutendste Lehrbuch dürften EUKLID's "Elemente" [40] sein. Über einen Zeitraum von 2000 Jahren, von ca. 300 v. Chr. bis Mitte des 19. Jahrhunderts, ist es als Standardwerk der Geometrie anzusehen.

EUKLID bemüht sich in den Elementen um einen systematischen und axiomatischen Aufbau der Geometrie. So beginnt er das erste Buch mit der Definition von Begriffen wie "Punkt" und "Linie" (Gerade). Anschließend gibt er in Form von Postulaten erlaubte Konstruktionen an und stellt in Axiomen Grundsätze für das logische Schließen auf. Aus den Definitionen, Postulaten und Axiomen leitet EUKLID anscheinend streng axiomatisch Sätze ab. Wesentliche Begriffe verwendet er jedoch rein intuitiv und bringt damit die Anschauung ins Spiel. Beispielsweise setzt er durch die empirische Benutzung des Wortes "zwischen" stillschweigend die Gültigkeit gewisser auf der Anschauung basierender Anordnungsaxiome voraus.

Bereits 1766 fordert J. H. LAMBERT [99], § 11 für die Geometrie eine Abstraktion von der Anschauung.

Auf die Notwendigkeit, Anordnungsaxiome aufzustellen, weist 1832 C. F. GAUSS [46], S. 222 in einem Brief an W. BOLYAI hin.

Mit dem Lehrbuch "Vorlesungen über neuere Geometrie" [122] (vgl. auch [29]) von M. PASCH erscheint 1882 das erste Werk, das den Forderungen nach strenger Axiomatik von der Intention her gerecht wird (vgl. [44], S. 106). M. PASCH erklärt zwar "Kernbegriffe" wie "Punkt" und "Linie" (Gerade) ([122], S. 3) und entnimmt die "Kernsätze" (Axiome) der Anschauung ([122], S. 4, 16), betont jedoch mehrmals, daß nicht die geometrischen Objekte an sich sondern die durch die Axiome zwischen ihnen hergestellten Beziehungen wesentlich sind und daß Sätze rein axiomatisch ohne Rückgriff auf die Anschauung aus den Axiomen abgeleitet werden müssen (vgl. [122], S. 16, 43f, 90ff). Diesen Forderungen wird M. PASCH im wesentlichen gerecht. Darüber hinaus stellt er als erster Anordnungsaxiome auf.

In Vorträgen "Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie" fordert

H. WIENER [176], [177] in Halle 1891 und in München 1893 eine Abstraktion von der Anschauung in der Geometrie. Man solle von Begriffen wie "Punkt" und "Gerade" als undefinierten Objekten ausgehen und durch Axiome nur Beziehungen zwischen derartigen Objekten herstellen (vgl. [176]).

O. BLUMENTHAL [21], S. 402f berichtet, daß D. HILBERT 1891 von WIENER's Vortrag stark beeindruckt ist und den Kern des Vortrages prägnant zusammenfaßt in dem Satz: "Man muß jederzeit an Stelle von 'Punkte, Geraden, Ebenen' 'Tische, Stühle, Bierseidel' sagen können."

In seinem richtungweisenden Werk "Grundlagen der Geometrie" [60] (vgl. auch [44], [168]), das derzeit in der 13. Auflage vorliegt, baut D. HILBERT die Geometrie streng axiomatisch auf: Gewisse, der Anschauung entlehnte Begriffe wie "Punkt", "Gerade", "liegt auf", "zwischen","kongruent" werden als undefinierte Objekte betrachtet. Axiome stellen Beziehungen zwischen derartigen geometrischen Objekten her. Sätze werden streng logisch, also ohne Rückgriff auf die Anschauung, aus den Axiomen abgeleitet. HILBERT's "Grundlagen der Geometrie" ist die erste umfassende Arbeit, die der Ende des 19. Jahrhunderts mehrfach geäußerten Forderung nach strenger Axiomatik in der Geometrie gerecht wird.

Für die mathematische Logik ist das HILBERT'sche Axiomensystem noch immer unbefriedigend, denn es ist nicht in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe formuliert. Ein auch den Logiker zufriedenstellendes Axiomensystem der euklidischen Geometrie stellt A. TARSKI erstmals 1926/27 in einer Vorlesung an der Universität Warschau vor (vgl. [138], S. 5; siehe auch [164], [165], S. 55f).

Beim TARSKI'schen Axiomensystem treten als geometrische Objekte nur noch Punkte auf. Mit einer ternären Relation (Bez.: betweenness relation) und einer quaternären Relation (Bez.: equidistance relation) werden in den Axiomen Beziehungen zwischen Punkten hergestellt.

Durch gemeinsame Untersuchungen vereinfachen E. KALLIN, S. TAYLOR und A. TARSKI das in [164] und [165] aufgeführte Axiomensystem zu der in [166] angegebenen Form. 1965 zeigt H. N. GUPTA [51], daß die in [166], S. 19 genannten Axiome A1 und A3 aus den anderen folgen (vgl. die Axiomensysteme in [121], S. 47 und [138], S. 10ff).

Aus geometrischer Sicht hat das TARSKI'sche Axiomensystem gegenüber dem HILBERT'schen einen entscheidenden Nachteil: Es beschreibt zwar sehr elegant die euklidische Geometrie als Ganzes, erlaubt aber keinen hierarchischen Aufbau der Geometrie.[1)] Im Rahmen des HILBERT'schen Axiomensystems hingegen kann man auf der untersten Stufe durch Forderung gewisser Verknüpfungsaxiome Inzidenzgeometrie treiben. Mittels weiterer Axiome gelangt man zur affinen oder projektiven Geometrie bzw. zur absoluten, euklidischen, hyperbolischen oder elliptischen Geometrie.

Da im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit Fragen zur Anordnung stehen, möchte ich die Struktur der in Axiomensystemen geforderten Anordnungsaxiome näher betrachten. Man kann zwischen drei Typen unterscheiden:

"Lineare Anordnungsaxiome" (HILBERT's Axiome II.1, II.2, II.3 in [60], S. 4f bzw. TARSKI's Axiome A1, A2, A3 in [166], S. 19) sagen etwas über die Lage der Punkte auf den Geraden aus. Sie bewirken eine lineare Anordnung auf jeder Geraden, allerdings i. a. erst in Verbindung mit weiteren Anordnungsaxiomen.

"Ebene Anordnungsaxiome" (II.4 in [60] bzw. A7 in [166]) gewährleisten, daß auf jeder Geraden die gleiche lineare Anordnung vorliegt. In der Regel fordert man entweder die Invarianz der linearen Anordnung gegenüber Parallelperspektivitäten - ein entsprechendes Axiom gibt 1905 K. T. VAHLEN [172], S. 141 an - oder das folgende, nach M. PASCH (vgl. [122], Kernsatz IV, S. 20) benannte Axiom: Liegen eine Gerade und ein Dreieck in einer Ebene und schneidet die Gerade eine Dreieckseite, so hat sie mit einer weiteren Dreieckseite einen Punkt gemeinsam.[2)]

"Verträglichkeitsaxiome" (III.4, III.5 in [60] bzw. A9, A10 in [166]) sichern die Verträglichkeit von Kongruenz und Anordnung.

---

1) Einen stufenweisen Aufbau der euklidischen Geometrie im Geiste des TARSKI'schen Axiomensystems findet man in [163] und ansatzweise in [138], [155] und [156].

2) Bereits im Mittelalter hat der Mathematiker, Physiker und Astronom Ibn al-Haitham (auch Alhazen genannt; ca. 965 - 1039 in Kairo) diese Aussage als Satz formuliert (vgl. A. P. JUSCHKEWITSCH [74], S. 283).

In Hinblick auf einen stufenweisen Aufbau der Geometrie werden in der vorliegenden Arbeit zunächst Geometrien betrachtet, in denen eine Inzidenzrelation und eine die Anordnung beschreibende Zwischenfunktion, aber noch keine Kongruenzrelation gegeben ist. Dann ist nur zwischen linearen und ebenen Anordnungsaxiomen zu unterscheiden.

Um die Bedeutung der linearen bzw. ebenen Anordnungsaxiome für die Anordnung in der Geometrie herauszukristallisieren, wird man die ebenen bzw. linearen Anordnungsaxiome abschwächen. Man wird im ersten Fall fordern, daß auf jeder Geraden *die gleiche lineare* Anordnung vorliegt, und darauf verzichten, daß diese lineare Anordnung invariant unter *allen* Parallelperspektivitäten ist. Im zweiten Fall wird man auf gewisse *lineare* Anordnungsaxiome verzichten, etwa auf die Bedingung, daß von je drei Punkten genau einer zwischen den beiden anderen liegt. Derartige Untersuchungen haben unter modifizierten Fragestellungen für die erste Verallgemeinerung u. a. L. W. SZCZERBA [149] - [154] , W. SZMIELEW [154], [158] - [162], A. PRESTEL [52], [53], [130] - [132] und H. N. GUPTA [52], [53] und für die zweite Verallgemeinerung u. a. E. SPERNER [144] - [146], H. KARZEL [78] - [80], F. BACHMANN und W. KLINGENBERG [10], J. JOUSSEN [71] - [73], H.-J. KROLL [94], F. KALHOFF [75], [76] und A. KREUZER [190], [191] durchgeführt.

Das zentrale Merkmal der Anordnung in der ebenen Geometrie besteht für E. SPERNER [144], [145] darin, daß jede Gerade die Ebene in zwei Halbebenen unterteilt. Jedem Punkt der einen Halbebene ordnet er den Wert +1 und jedem Punkt der anderen Halbebene den Wert -1 zu. Damit liegen zwei Punkte genau dann auf der gleichen Seite einer Geraden, also in der gleichen Halbebene, wenn sie den gleichen Wert erhalten haben.

Eine Abbildung, die jedem Punkt-Geraden-Paar (p,G) mit $p \notin G$ willkürlich den Wert +1 oder -1 zuordnet, bezeichnet E. SPERNER als Ordnungsfunktion. Wenn eine Ordnungsfunktion α zusätzlich die Geradenrelation erfüllt (d. h. für kollineare Punkte p,q,r und Geraden G,H mit $r \in G,H$, $p,q \notin G,H$ gilt $\alpha(p,G)\,\alpha(q,G) = \alpha(p,H)\,\alpha(q,H)$), induziert sie auf jeder Geraden eine Zwischenfunktion. Hierdurch ist i. a. noch keine lineare Anordnung auf den Geraden und damit keine volle Anordnung in der Geometrie gegeben. E. SPERNER [144] - [146] spricht deshalb von einer "Halbordnung".

Halbgeordnete desarguessche projektive und affine Ebenen beschreibt er algebraisch durch halbgeordnete Körper. In Verallgemeinerung des Begriffes des angeordneten Körpers genügen halbgeordnete Körper nicht notwendig dem Monotoniegesetz der Addition. Sie besitzen daher im allgemeinen keine lineare Anordnung. In Erweiterung des o. a. Satzes von E. SPERNER ordnet H. KARZEL [78], [79] (vgl. auch [76]) halbgeordneten projektiven und affinen Ebenen halbgeordnete Ternärkörper zu.

L. W. SZCZERBA und W. SZMIELEW fragen 1970 nach der Bedeutung des Axioms von PASCH im Rahmen des TARSKI'schen Axiomensystems der euklidischen Geometrie. L. W. SZCZERBA [149] zeigt zunächst, daß das in [166] angegebene Axiom A7, das Axiom von PASCH, unabhängig von den anderen dort aufgeführten Axiomen ist. Um auf der Basis des um das Axiom von PASCH verminderten TARSKI'schen Axiomensystems Geometrie treiben zu können, müssen L. W. SZCZERBA und W. SZMIELEW das reduzierte TARSKI'sche Axiomensystem durch zwei mit Hilfe des Axioms von PASCH beweisbare Bedingungen ergänzen, und zwar durch die Axiome A1 und A8 in [154]. Auf diese Weise aus dem TARSKI'schen Axiomensystem hervorgehende Geometrien nennen L. W. SZCZERBA [150] - [154] und W. SZMIELEW [154], [158] - [160] "schwach elementar euklidisch Pasch-frei" oder kurz "Pasch-frei".

In [154] stellen sie Pasch-freie Geometrien algebraisch durch semigeordnete kommutative pythagoreische Körper dar. In Verallgemeinerung von angeordneten Körpern genügen semigeordnete Körper nicht notwendig dem Monotoniegesetz der Multiplikation.

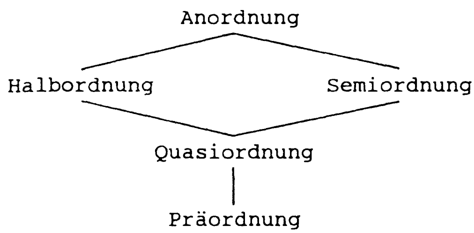
Ein Vergleich der Untersuchungen von E. SPERNER und H. KARZEL mit denen von L. W. SZCZERBA und W. SZMIELEW unter dem Aspekt der Anordnungshierarchie führt zu folgender Problemstellung: Man übertrage die von E. SPERNER und H. KARZEL für Halbordnungen durchgeführten Untersuchungen auf Semiordnungen, d. h. man beschreibe semigeordnete affine Räume algebraisch durch semigeordnete Ternärkörper.

Diesbezügliche Betrachtungen zeigen, daß zwischen geometrischer und algebraischer Semiordnung die gleichen Beziehungen wie zwischen geometrischer und algebraischer Halbordnung bestehen.

Die Axiomensysteme für semi- und halbgeordnete affine Räume und die Axiomensysteme für semi- und halbgeordnete Ternärkörper weisen jeweils viele Gemeinsamkeiten auf. Daher ist es naheliegend, eine gemeinsame Verallgemeinerung beider Anordnungstypen, die sog. Quasiordnung, einzuführen. Die üblichen Zirkelsätze zwischen geometrischem und algebraischem Anordnungstyp sind dann lediglich für Quasiordnungen zu beweisen. Als Spezialfälle enthalten diese allgemeinen Sätze die Darstellungssätze für semi- und halbgeordnete affine Räume.

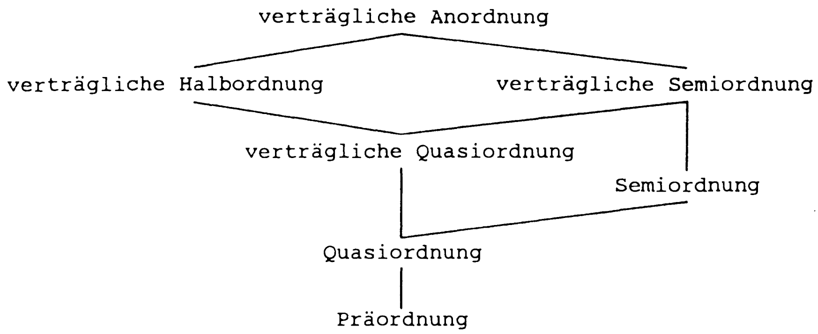
Eine Analyse des Darstellungssatzes für quasigeordnete affine Räume zeigt, daß gewisse Eigenschaften von Quasiordnungen für den eigentlichen Zirkelschluß unwesentlich sind. Diese Beobachtung führt zu einer nochmaligen Abschwächung des Anordnungsbegriffes. Die sog. Präordnung bildet die unterste Stufe, auf der man gerade noch die üblichen Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Struktur herstellen und von einer verallgemeinerten Anordnung sprechen kann.

In der Geometrie und Algebra liegt damit folgende Anordnungshierarchie vor:



Ein wesentliches Element der Geometrie ist die Kongruenz. Daher wird für affine Räume, in denen neben einer verallgemeinerten Anordnung zusätzlich eine Kongruenzrelation gegeben ist, die Auswirkung der Abschwächung der Anordnungsaxiome studiert. Ein Ziel dieser Betrachtungen ist die Übertragung der von L. W. SZCZERBA und W. SZMIELEW für Semiordnungen angestellten Überlegungen auf die anderen Anordnungstypen.

Bei einem stufenweisen Aufbau der Geometrie wird man über die Untersuchungen von L. W. SZCZERBA und W. SZMIELEW hinaus auch Anordnungstypen betrachten, die mit der Kongruenzrelation nicht notwendig verträglich sind. Mit dieser Differenzierung gelangt man zu folgender Verfeinerung der auf S. 6 dargestellten Anordnungshierarchie:



Aus diesem Schema liest man beispielsweise ab, daß jede Halbordnung mit der Kongruenzrelation verträglich ist (vgl. auch [95], § 6) und daß jede mit der Kongruenzrelation verträgliche Präordnung bereits eine Quasiordnung ist.

Zu den Anordnungstypen in affinen Räumen stellen sich viele Fragen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht erörtert werden. Beispielsweise wird das Problem der Fortsetzbarkeit der Anordnungstypen auf den projektiven Abschluß nicht diskutiert. Durch die projektive Fortsetzung würde man zu einer entsprechenden Anordnungshierarchie in projektiven Räumen gelangen. Für Halbordnungen findet man derartige Untersuchungen bei E. SPERNER [145], H. KARZEL [79],[80], J. JOUSSEN [72] und H.-J. KROLL [94].

Affine Geometrien mit verallgemeinerter Anordnung lassen sich algebraisch durch Ternärkörper beschreiben, die den gleichen Anordnungstyp tragen. Folglich induziert jeder algebraische Satz über Anordnungstypen in Ternärkörpern einen geometrischen Satz über entsprechende Anordnungstypen in affinen Geometrien. Das Studium von Anordnungstypen in Ternärkörpern ist daher sowohl unter algebraischem als auch unter geometrischem Aspekt interessant.

In der vorliegenden Arbeit werden gewisse Ternärkörperklassen auf ihre Prä-, Quasi-, Semi-, Halb- bzw. Anordnungsfähigkeit untersucht. Zusätzlich wird die Anzahl ihrer Prä-, Quasi-, Semi-, Halb- bzw. Anordnungen bestimmt. Diese Ergebnisse verallgemeinern und erweitern die wohlbekannten Sätze von E. ARTIN und O. SCHREIER [8], R. BAER [13], G. PICKERT [123] und T. SZELE [157] zur Kennzeichnung der anordnungsfähigen kommutativen und nicht-kommutativen Körper und die Sätze von L. BRÖCKER [23] und A. TSCHIMMEL [170] zur Anzahl der Anordnungen in kommutativen und nicht-kommutativen Körpern.

Diese skizzenhafte Darstellung des Inhaltes spiegelt das Entstehen der vorliegenden Arbeit wider. Ein derartiger Aufbau der Arbeit wäre aus didaktischer Sicht vielleicht empfehlenswert, würde aber zwangsläufig zu vielen Wiederholungen führen. Zudem müßte man ständig zwischen Geometrie und Algebra hin- und herspringen. Daher habe ich mich unter mathematischen Aspekten, allerdings streckenweise auf Kosten der Motivation, für folgenden Aufbau der Arbeit entschieden: Die erwähnten Anordnungstypen, also Präordnungen, Quasiordnungen, Semiordnungen, Halbordnungen und Anordnungen, werden im ersten Teil der Arbeit in Ternärkörpern und im zweiten Teil in affinen Räumen betrachtet.

Ziel des ersten Kapitels ist eine Verallgemeinerung der wohlbekannten Sätze zur Anordnungsfähigkeit kommutativer und nicht-kommutativer Körper (vgl. [8], [13], [123], [157]) und zur Anzahl ihrer Anordnungen (vgl. [23], [170]). Entsprechende Sätze werden einerseits für allgemeinere algebraische Strukturen, und zwar im wesentlichen für Alternativkörper, (planare) Fastkörper, Semikörper, planare Quasikörper, cartesische Gruppen, Doppelloops und Ternärkörper, und andererseits für die oben diskutierten allgemeinen Anordnungstypen bewiesen.

Nach Definition der Begriffe "Präordnung", "Quasiordnung", "Semiordnung", "Halbordnung" und "Anordnung" für Ternärkörper (§ 1) werden eingehend Prä- und Quasiordnungen in cartesischen Gruppen (§ 3), Quasi- und Semiordnungen in planaren Quasikörpern (§ 4), Halbordnungen in Doppelloops mit assoziativer Multiplikation (§ 5) und

Anordnungen in (planaren) Fastkörpern (§ 6) studiert. Unter anderem werden sämtliche Prä- und Quasiordnungen in cartesischen Gruppen (Satz (3.7), (3.15)) und alle Halbordnungen in Doppelloops mit assoziativer Multiplikation (Satz (5.14)) angegeben. Semiordnungsfähige cartesische Gruppen und planare Quasikörper sowie anordnungsfähige (planare) Fastkörper werden gekennzeichnet (Satz (3.23), (4.16), (6.8)), und die Anzahl ihrer Semiordnungen bzw. Anordnungen wird abgeschätzt (Satz (4.19), (6.14)). Pythagoreische und euklidische (planare) Fastkörper werden in Hinblick auf ihre spezifischen Anordnungseigenschaften charakterisiert (§ 7). Beispiele nichtkommutativer pythagoreischer und euklidischer Körper findet man in § 9 (vgl. auch [50] und [170]).

Im ersten Kapitel wird auf die Angabe von Beispielen verzichtet, da das zweite als umfangreiche Beispielsammlung konzipiert ist. Für jede Lenz-Barlotti-Klasse werden Ternärkörper mit echten nichttrivialen Prä-, Quasi-, Semi-, Halb- und Anordnungen angegeben, sofern derartige existieren. Dabei versuchen wir mit möglichst wenig Beispieltypen auszukommen. In Kapitel II a werden mit Potenzreihenquasikörpern Beispiele für die Lenz-Barlotti-Klassen IV a 1, IV a 2, V und VII 2 und in Kapitel II b mit Moulton-Naumann-Doppelloops Beispiele für die Lenz-Barlotti-Klassen I 1, I 2, I 3, I 4, II 1, II 2, III 1 und III 2 konstruiert. Somit liefern zwei Ternärkörpertypen Beispiele für alle Lenz-Barlotti-Klassen mit Ausnahme der Klassen I 6, IV a 3 und VII 1. Die Ternärkörper der exemplarisch betrachteten Beispieltypen werden eingehend auf Existenz und Anzahl von Prä-, Quasi-, Semi-, Halb- und Anordnungen untersucht.

In Potenzreihenquasikörpern werden mit mehreren Methoden verallgemeinerte Anordnungen definiert (§ 8). Es zeigt sich, daß jede der Lenz-Barlotti-Klassen IV a 1, IV a 2, V und VII 2 Ternärkörper enthält, die zugleich echte nicht-triviale Prä-, Quasi-, Semi-, Halb- und Anordnungen besitzen (§ 9, 10, 11).

Hall-Systeme und damit insbesondere der Ausnahme-Fastkörper, der einzige zur Lenz-Barlotti-Klasse IV a 3 gehörende Ternärkörper, besitzen echte Prä- und Quasiordnungen, aber keine nicht-trivialen Halbordnungen und insbesondere keine Anordnungen (§ 12).