Walter Strampp

Höhere Mathematik mit Mathematica 1

Aus dem Programm
Mathematik/Computeralgebra

N. Blachman
Mathematica griffbereit

E. Heinrich und H.-D. Janetzko
Das Mathematica Arbeitsbuch

G. Fischer
Lineare Algebra

O. Forster
Analysis 1

W. Strampp und V. Ganzha
Differentialgleichungen mit Mathematica

O. Kerner, J. Maurer, J. Steffens, T. Thode und R. Voller
Vieweg Mathematik Lexikon

Vieweg

Walter Strampp

Höhere Mathematik mit Mathematica

Band 1: Grundlagen, Lineare Algebra

Mit 164 Beispielen mit Mathematica

vieweg

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Bertelsmann Fachinformation GmbH.

ISBN 978-3-528-06788-5 ISBN 978-3-322-92915-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-92915-0

Vorwort

So wie die Benutzung eines Taschenrechners heute eine Selbstverständlichkeit geworden ist, werden in einigen Jahren Computeralgebra-Systeme zur alltäglichen Anwendung von Mathematik dazugehören. Einerseits übernimmt der Rechner die Rolle eines Expertensystems, welches das sonst in Formelsammlungen gespeicherte Wissen bereithält, langwierige Rechenarbeiten übernimmt oder Ergebnisse bei Übungen kontrolliert. Andererseits ermöglicht der Rechner ein spielerisches, experimentelles Erarbeiten begrifflicher Inhalte und eine Objektivierung von Begriffen durch Visualisieren und Manipulieren von Symbolen am Bildschirm.

Deshalb wird in diesem Buch nicht nur auf die mathematischen Inhalte sondern auch auf ihre operative Handhabung mit Hilfe des Computeralgebra-Systems *Mathematica* Wert gelegt. In zahlreichen Beispielen werden die mathematischen Grundvorstellen mit Hilfe der Wechselwirkung von inhaltlicher Überlegung und symbolischem Rechnen verdeutlicht. Der Computer unterstützt das mathematische Denken und verdrängt es nicht, wie oft argumentiert wird.

Die *Mathematica*-Befehle für Grundoperationen wie Differentiation, Integration, Grenzwertbildung, Reihenentwicklung, Matrizenoperationen, Determinantenberechnung etc. sind sehr leicht verständlich und suggestiv angelegt. Im wesentlichen haben wir *Mathematica* in der Version 2.2.3 verwendet. Die verwendeten Befehle können ohne Änderung in einer neueren *Mathematica*-Version übernommen werden. Alle Graphiken wurden mit *Mathematica* erstellt.

Im ersten Teil des Buches werden die unverzichtbaren Grundlagen der Höheren Mathematik Zahlen, Vektoren und Funktionen betrachtet. Der zweite Teil ist der linearen Algebra gewidmet. Die Lösung linearer Gleichungssysteme steht im dabei Zentrum. Ein abschließendes Kapitel behandelt Eigenwerte und Normalformen von Matrizen in dem Umfang, wie sie etwa bei der Theorie linearer Differentialgleichungen benötigt werden.

Das vorliegende Buch stellt den ersten Band einer vierbändigen Einführung in die Höhere Mathematik dar. Die einzelnen Bände sind inhaltlich aufeinander abgestimmt; gleichwohl ist jeder Band in sich abgeschlossen. Die äußere Form wurde der inhaltlichen Zielsetzung angepaßt. Neu auftretende mathematische Grundbegriffe werden ebenso wie die wichtigsten *Mathematica*-Befehle auf der Randspalte hervorgehoben. Diejenigen Leser, die Zugang zum *World Wide Web* haben, können sich den gesamten *Mathematica*-Programmcode aus den Beispielen des ersten und zweiten Bandes vom Server des Verlags herunterladen. Die Adresse:

`http://www.fachinformation.bertelsmann.de/verlag/bfw/homepage.htm`

An dieser Stelle möchte ich den Herren M. Bleck, F. Steuernagel und J. Zaun, die mir bei der Entstehung dieses Buches in vielfältiger Weise geholfen haben, herzlich danken. Herrn E. Vorozhtsov und meiner Tochter Pia gebührt mein Dank für die Beseitigung vieler Schreibfehler. Herr W. Schwarz vom Verlag Vieweg hat dieses Buch in allen Phasen des Entstehens mit wertvollen Ratschlägen begleitet und mit stetigem Engagement gefördert.

Literatur:

K. Burg, H. Haf, F. Wille, Höhere Mathematik für Ingenieure, Band I und II, B. G. Teubner, Stuttgart 1990.

K. Meyberg, P. Vachenauer, Höhere Mathematik, Band I. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1991.

L. Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band I und II, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1994.

M. L. Abell, J. P. Braselton, Mathematica by Example, Academic Press, San Diego, CA 1992.

W. Koepf, A. Ben-Israel, B. Gilbert, Mathematik mit Derive, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1993.

R. Braun, R. Meise, Analysis mit Maple, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1995.

W. Werner, Mathematik lernen mit Maple V, Elbi-Verlag, Schöntal 1993.

H. Niemeyer, E. Wermuth, Lineare Algebra- Analytische und numerische Behandlung, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1987.

G. Fischer, Lineare Algebra, Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1995.

K. Endl, Analytische Geometrie und Lineare Algebra, Würfel-Verlag, Gießen 1984.

H.-J. Kowalsky, Lineare Algebra, de Gruyter, Berlin 1979.

E. Johnson, Linear Algebra with Mathematica, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, CA 1995.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Grundlagen

1 Reelle Zahlen

1.1 Körper

Das Rechnen mit rationalen, reellen und komplexen Zahlen unterliegt allgemeinen Strukturgesetzen, die wir zunächst unabhängig von der zugrunde liegenden Zahlenmenge betrachten wollen.

Definition 1.1 Ein *Körper* $\mathbb{K}$ ist eine nichtleere Menge mit zwei Operationen: Addition und Multiplikation. Je zwei Elementen $a \in \mathbb{K}$ und $b \in \mathbb{K}$ ist eindeutig ihre Summe $a + b \in \mathbb{K}$ und ihr Produkt $a \cdot b \in \mathbb{K}$ zugeordnet. Ferner gelten die folgenden Grundgesetze 1), 2) und 3).

Körper

1) *Grundgesetze der Addition*:

1a) Für je zwei Elemente $a, b \in \mathbb{K}$ gilt

$$a + b = b + a\,, \quad \text{(Kommutativgesetz)}.$$

1b) Für je drei Elemente $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$a + (b + c) = (a + b) + c\,, \quad \text{(Assoziativgesetz)}.$$

1c) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$, so daß für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt

$$a + 0 = a\,, \quad \text{(Existenz des Nullelements)}.$$

1d) Zu jedem $a \in \mathbb{K}$, gibt es ein Element $-a \in \mathbb{K}$, so daß gilt $a + (-a) = 0$, (Existenz des inversen Elements).

Grundgesetze der Addition

2) *Grundgesetze der Multiplikation*:

2a) Für je zwei Elemente $a, b \in \mathbb{K}$ gilt

$$a \cdot b = b \cdot a\,, \quad \text{(Kommutativgesetz)}.$$

Grundgesetze der Multiplikation

2b) Für je drei Elemente $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \text{(Assoziativgesetz)}.$$

2c) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K}$, $1 \neq 0$, so daß für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt

$$a \cdot 1 = a, \quad \text{(Existenz des Einselements)}.$$

2d) Zu jedem $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, gibt es ein Element $a^{-1} \in \mathbb{K}$, so daß gilt

$$a \cdot a^{-1} = 1, \quad \text{(Existenz des inversen Elements)}.$$

Distributivgesetz

3) *Distributivgesetz*:

Für je drei Elemente $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Körperaxiome

Die Grundgesetze der Addition und Multiplikation werden zusammen mit dem Distributivgesetz als *Körperaxiome* bezeichnet.

Zur Vereinfachung lassen wir bei der Multiplikation das Operationszeichen $\cdot$ weg und schreiben

$$a \cdot b = a\,b.$$

Weitere Vereinbarungen sind die Schreibweisen:

$$n\,a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{n-mal}}$$

und

$$a^n = \underbrace{a\,a \cdots a}_{\text{n-mal}}.$$

Der Einfachheit halber verwenden wir die Abkürzung $n\,1 = n$. Oft ist es günstig, auch über a^0 zu verfügen, und man setzt $a^0 = 1$ fest.

Beispiel 1.1
Wir bestätigen die bekannte Beziehung:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

mit 3) und 2a):

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)\,(a + b)\\ &= (a + b)\,a + (a + b)\,b\\ &= a\,a + b\,a + a\,b + b\,b\\ &= a^2 + 2\,a\,b + b^2.\end{aligned}$$

Wir zeigen:

$$(a\,b)^2 = a^2\,b^2$$

mit 2a) und 2c):

$$\begin{aligned}(a\,b)^2 &= (a\,b)\,(a\,b)\\ &= a\,b\,a\,b\\ &= a\,a\,b\,b\\ &= a^2\,b^2\,.\end{aligned}$$

Der Befehl `Expand` veranlaßt *Mathematica*, unter Verwendung der Körperaxiome auszumultiplizieren und zusammenzufassen. `Expand`

```
Expand[(a+b)^2]

 2             2
a  + 2 a b + b

(a b)^2

 2  2
a  b
```

Das Produkt $(ab)^2$ wird ohne Aufforderung umgeformt.

Beispiel 1.2
Wir betrachten weitere Anwendungen der Körperaxiome mit *Mathematica*:

```
Expand[(x + 2) (y x - 2 x + 3)]

            2           2
6 - x - 2 x  + 2 x y + x  y

Expand[4 a x - 2 x y - x (4 a - 2 y)]

0
```

Mit `Simplify` kann *Mathematica* Terme vereinfachen und zusammenfassen und eine Form herstellen, die die kleinstmögliche Anzahl von Termen enthält. Betrachten wir noch einmal den zweiten Ausdruck; die eingegebene Summe wird von `Simplify` in der erwarteten Weise vereinfacht. `Simplify`

```
Simplify[4 a x - 2 x y - x (4 a - 2 y)]

0
```

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt also:

$$(x+2)\,(y\,x-2x+3) = x^2\,y + 2\,x\,y - 2x^2 - x + 6$$

und

$$4\,a\,x - 2\,x\,y - x\,(4a-2\,y) = 0\,.$$

Nun ziehen wir einige wichtige Folgerungen aus den Körperaxiomen:

> **Satz 1.1** *Das Nullelement und das Einselement sind jeweils* eindeutig bestimmt. *Das inverse Element der Addition und das inverse Element der Multiplikation sind jeweils* eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir nehmen an, wir hätten zwei verschiedene Nullelemente 0 und 0^* sowie zwei verschiedene Einselemente 1 und 1^*. Dann folgt aus 1c):

$$0 = 0^* + 0 = 0^*$$

und aus 2c):

$$1 = 1^* 1 = 1^* .$$

Wir nehmen nun an, wir hätten zwei inverse Elemente $-a$ und a^* der Addition sowie zwei inverse Elemente a^{-1} und a^{**} der Multiplikation. Dann folgt aus 1d):

$$a + (-a) = 0 \quad \text{und} \quad a + a^* = 0 ,$$

also

$$a + (-a) = a + a^* .$$

Addieren wir auf beiden Seiten das Inverse $-a$ und benützen 1b), so folgt $-a = a^*$. Mit Hilfe von 2d) und 2b) ergibt sich $a^{-1} = a^{**}$ analog. □

Bemerkung 1.1 Aus Satz 1.1 erhalten wir sofort die *eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen*:

Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen

> Die Gleichung
> $$a + x = b$$
> besitzt genau eine Lösung $x = b + (-a)$.
> Die Gleichung
> $$a x = b , \quad a \neq 0 ,$$
> besitzt genau eine Lösung: $x = b a^{-1}$.

Zur Vereinfachung schreiben wir:

$$b + (-a) = b - a \quad \text{und} \quad b a^{-1} = \frac{b}{a} ,$$

insbesondere

$$a^{-1} = \frac{1}{a} .$$

Weiter wird

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

bei $a \neq 0$ gesetzt.

Satz 1.2 *Es gilt für alle $a \in \mathbb{K}$:*

$$a\,0 = 0\,.$$

Ferner:

$$a\,b = 0 \iff a = 0 \quad \textit{oder} \quad b = 0\,.$$

Beweis: Mit 1c) und 3) folgt

$$a\,0 = a\,(0+0) = a\,0 + a\,0$$

und mit der Bemerkung 1.1 die Behauptung. □

Beispiel 1.3
Wir betrachten eine etwas allgemeinere Gleichung als in Bemerkung 1.1 und fragen nach allen $x \in \mathbb{K}$, die folgender Gleichung genügen:

$$a\,x + b = c\,.$$

1.) Sei $a = 0$. Dann ist $a\,x = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$. Ist $b = c$, so wird die Gleichung von allen $x \in \mathbb{K}$ gelöst. Ist $b \neq c$, so gibt es kein $x \in \mathbb{K}$, welches die Gleichung löst.

2.) Sei $a \neq 0$. Addition von $-b$ auf beiden Seiten ergibt

$$a\,x = c - b$$

und

$$x = \frac{c-b}{a}\,.$$

Wir benützen den Befehl `Solve`, um diese Gleichung mit *Mathematica* zu lösen. *Mathematica* überläßt es dem Benutzer, den Fall $a = 0$ gesondert zu betrachten. (Ein Computeralgebrasystem würde wohl sonst zu schwerfällig werden). `Solve`

```
Gleichung=a x+b==c;
l=Solve[Gleichung,x]
```

```
          b - c
{{x -> -(-----)}}
            a
```

Die Lösung wird in Form einer *Regelliste* ausgegeben. Das Ergebnis selbst ist uns in dieser Form von den Körperaxiomen her gesehen noch nicht bekannt. Wir überprüfen es jedoch mit *Mathematica*: **Regelliste**

```
Gleichung/.1

{True}
```

True

Der Wert `True` zeigt die Richtigkeit des Ergebnisses an.

Beispiel 1.4
Welche $x \in \mathbb{K}$ lösen die Gleichung:

$$3x - 7 = a\,x + 2\,?$$

1.) Sei $3 = a$. Subtraktion von $3x$ auf beiden Seiten ergäbe $-7 = 2$, so daß die Gleichung keine Lösung besitzt.

2.) Sei $a \neq 3$. Addieren wir zunächst auf beiden Seiten der Gleichung 7 und subtrahieren anschließend den Term $a\,x$, dann erhalten wir nach Anwendung des Distributivgesetzes die äquivalente Gleichung

$$(3 - a)\,x = 9$$

mit der Lösung:

$$x = \frac{9}{3 - a}\,.$$

Benützen wir `Solve`, dann wird der Fall $a = 3$ wiederum nicht ausgeschlossen:

```
Solve[3 x - 7 == a x + 2,x]

           9
{{x -> -----}}
        3 - a
```

Mit ähnlichen Schlußweisen wie bei den vorausgegangenen Sätzen 1.1 und 1.2 leitet man aus den Körperaxiomen die folgenden *Vorzeichenregeln*:

Vorzeichenregeln

Satz 1.3 *Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{K}$:*

1.) $-(-a) = a\,,$

2.) $-(a + b) = -a - b\,,$

3.) $(-a)\,b = a\,(-b) = -a\,b\,,$

4.) $(-a)(-b) = a\,b\,,$

und die *Regeln für die Bruchrechnung* her:

Satz 1.4 *Es gilt für $a, b, c, d, \in \mathbb{K}$,*

1.) Wenn $b \neq 0, d \neq 0$:
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d},$$
2.) wenn $b \neq 0, d \neq 0$
$$\frac{a}{b}\frac{e}{d} = \frac{a\,e}{b\,d},$$
3.) wenn $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$:
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\,d}{b\,c}, \quad \textit{insbesondere} \quad \frac{1}{\frac{1}{d}} = d\,.$$

Regeln für die Bruchrechnung

Beispiel 1.5

Es gilt, wenn $a \neq 0$ ist:
$$-\frac{b}{a} = \frac{-b}{a} = \frac{b}{-a}$$
und
$$-\frac{b-c}{a} = \frac{c-b}{a} = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} = -\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\,.$$
Mit *Mathematica* bestätigen wir die zweite Identität:

```
Expand[(c-b)/a]

 b    c
-(-) + -
 a    a

Expand[-(b-c)/a]

 b    c
-(-) + -
 a    a
```

Wir weisen an dieser Stelle noch einmal darauf hin, daß *Mathematica* in solchen Fällen nur formal arbeiten kann. Dafür zu sorgen, daß $a \neq 0$ ist, ist Sache des Anwenders.

Beispiel 1.6

Seien $b_1, b_2, b_3 \neq 0$. Wir berechnen die Summe

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} &= \frac{a_1\,b_2 + a_2\,b_1}{b_1\,b_2} + \frac{a_3}{b_3} \\
&= \frac{(a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,b_3 + a_3\,b_1\,b_2}{b_1\,b_2\,b_3} \\
&= \frac{a_1\,b_2\,b_3 + a_2\,b_1\,b_3 + a_3\,b_1\,b_2}{b_1\,b_2\,b_3}\,.
\end{aligned}$$

Together

Mit dem Befehl `Together` werden Brüche auf einen Nenner gebracht und Terme im Zähler zusammengefaßt:

```
Together[a1/b1+a2/b2+a3/b3]

a3 b1 b2 + a2 b1 b3 + a1 b2 b3
------------------------------
           b1 b2 b3
```

Beispiel 1.7

Sei $x \neq 1, -1$. Wir fassen die folgenden Brüche:

$$\frac{1}{4x-4} - \frac{1}{4x+4} - \frac{1}{2(1+x^2)} = \frac{1}{x^4-1}$$

mit `Simplify` zusammen:

```
Simplify[1/(4 x - 4) - 1/(4 x + 4) - 1/(2(1+x^2))]

   1
---------
       4
-1 + x
```

Beispiel 1.8

Termumformungen mit *Mathematica*:

Wir stellen noch einmal einige Möglichkeiten zur Manipulation von Ausdrücken mit Brüchen zusammen und formen den Ausdruck um:

$$3\,\frac{(x-2)\,(x+3)}{(x+2)\,(x-7)}, \quad x \neq -2, 7,$$

```
Ausdruck=(3 (x-2) (x+3)) / ((x+2) (x-7))

3 (-2 + x) (3 + x)
--------------------
(-7 + x) (2 + x)
```

Expand

`Expand` multipliziert den Zähler aus und beläßt den Nenner in faktorisierter Form.

```
Expand[Ausdruck]

        -18                      3 x
----------------- + ------------------ +
 (-7 + x) (2 + x)     (-7 + x) (2 + x)

            2
        3 x
-----------------
 (-7 + x) (2 + x)
```

`ExpandAll` multipliziert sowohl Zähler als auch Nenner aus. `ExpandAll`

```
ExpandAll[Ausdruck]

       -18                   3 x                   3 x
---------------- + ---------------- + ----------------
               2                   2                   2
 -14 - 5 x + x       -14 - 5 x + x       -14 - 5 x + x
```

`Together` bringt alle Terme auf einen gemeinsammen Nenner und faßt zusammen. `Together`

```
Together[%]

               2
 3 (-6 + x + x )
-----------------
               2
 -14 - 5 x + x
```

`Apart` zerlegt Ausdrücke in Summanden mit möglichst einfachen Nennern. `Apart`

```
Apart[%]
          50           4
3 + ------------ + -----------
     3 (-7 + x)     3 (2 + x)
```

Die Funktion `Factor` zerlegt einen Ausdruck in ein Produkt von Faktoren. Im Gegensatz zu `Expand` faktorisiert `Factor` bei einem Bruch sowohl den Zähler als auch den Nenner. `Factor`

```
Factor[%]

 3 (-2 + x) (3 + x)
--------------------
 (-7 + x) (2 + x)
```

Da die Addition dem assoziativen Gesetz unterliegt, können wir eine endliche Anzahl von Summanden $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ in beliebiger Reihenfolge, (ohne Klammern zu setzen), addieren. Dies führt auf das *Summenzeichen*:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n .$$

Summenzeichen

Der *Summationsindex* kann beliebig umbenannt und verschoben werden: **Summationsindex**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+l}^{n+l} a_{k-l}\,,$$

für jede beliebige ganze Zahl l.

Beispiel 1.9
Summieren mit *Mathematica*:

Sum Der Befehl Sum veranlaßt *Mathematica*, Terme aufzusummieren.

```
Sum[a[k],{k,1,4}]
a[1] + a[2] + a[3] + a[4]

Sum[a[k+2],{k,-1,2}]

a[1] + a[2] + a[3] + a[4]
```

Beispiel 1.10
Wir berechnen die Summe:

$$\sum_{k=1}^{100} k = \underbrace{\underbrace{(1+100)}_{=101} + \underbrace{(2+99)}_{=101} + \cdots + \underbrace{(49+52)}_{=101} + \underbrace{(50+51)}_{=101}}_{50 \text{ Summanden}} = 5050\,.$$

Mit Sum bekommen wir (mit umbenanntem und verschobenem Summationsindex):

```
Sum[k,{k,1,100}]

5050

Sum[j,{j,1,100}]

5050

Sum[k-1,{k,1+1,100+1}]

5050
```

Eine einfache Folgerung aus der Summenschreibweise ist:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\,.$$

Außerdem gilt für $1 \le m \le n$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k\,.$$

Wenn wir mn Summanden $a_1, \dots, a_{mn} \in \mathbb{K}$ haben, so können wir sie mit einem Doppelindex in einem Rechtecksschema:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{11}\,, & \cdots, & \alpha_{1n}\,, \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1}\,, & \cdots, & \alpha_{mn} \end{array}$$

anordnen, d.h.

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{11} = a_1\,, & \cdots, & \alpha_{1n} = a_n\,, \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1} = a_{m,n-n+1}\,, & \cdots, & \alpha_{mn} = a_{m,n-n+n}\,. \end{array}$$

Die Summe über alle Summanden kann man nun als *Doppelsumme* schreiben:

Doppelsumme

$$\sum_{k=1}^{mn} a_k = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\right),$$

(Zeilensummen bzw. Spaltensummen). Dies liefert die Vertauschungsregel für Doppelsummen:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\,.$$

Die Verallgemeinerung des Distributivgesetzes läßt sich ebenfalls bequem mit dem Summenzeichen formulieren:

$$a \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a\, a_k$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\, b_j\,.$$

Beispiel 1.11

Wir berechnen eine Doppelsumme und bestätigen die Vertauschungsregel: