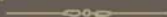


J. IKRAMOV



**PROBLEMAS DE
ALGEBRA LINEAL**

PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL

Х. Д. Икрамов

ЗАДАЧНИК ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Издательство «Наука» Москва

J. Ikrámov

Problemas
de
álgebra
lineal



Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por S. Bulánov

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 4 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-001288-5

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975.

Ⓜ traducción al español de la edición rusa, revisada y ampliada, S. Bulánov. 1990

INDICE

Prefacio	7
Capítulo 1. Espacios lineales	11
§ 1.0. Terminología y generalidades	11
§ 1.1. Definición del espacio lineal	17
§ 1.2. Dependencia lineal	19
§ 1.3. Cápsula lineal. Rango de un sistema de vectores	22
§ 1.4. Base y dimensiones del espacio	26
§ 1.5. Suma e intersección de subespacios	30
Capítulo 2. Espacios euclídeos y unitarios	33
§ 2.0. Terminología y generalidades	33
§ 2.1. Determinación del espacio euclídeo	35
§ 2.2. Ortogonalidad, base ortonormal, proceso de ortogonalización	38
§ 2.3. Complemento ortogonal, sumas ortogonales de subespacios	41
§ 2.4. Longitudes, ángulos, distancias	45
§ 2.5. Espacio unitario	48
Capítulo 3. Determinantes	52
§ 3.0. Terminología y generalidades	52
§ 3.1. Definición y propiedades elementales de los determinantes	56
§ 3.2. Menores, complementos algebraicos y teorema de Laplace	63
§ 3.3. Determinantes y volumen de un paralelepípedo en un espacio euclídeo	70
§ 3.4. Cálculo de determinantes por el método de eliminación	75
Capítulo 4. Sistemas de ecuaciones lineales	84
§ 4.0. Terminología y generalidades	84
§ 4.1. Rango de una matriz	86
§ 4.2. Planos en un espacio lineal	89
§ 4.3. Planos en un espacio euclídeo	92
§ 4.4. Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales	95
§ 4.5. Sistemas no homogéneos de ecuaciones lineales	101
Capítulo 5. Operadores lineales y matrices	111
§ 5.0. Terminología y generalidades	111
§ 5.1. Definición del operador lineal, imagen y núcleo de un operador	115
§ 5.2. Operaciones lineales sobre operadores	120
§ 5.3. Multiplicación de operadores	123
§ 5.4. Operaciones sobre matrices	127
§ 5.5. Matriz inversa	141
§ 5.6. Matriz de un operador lineal, cambio a otra base, matrices equivalentes y semejantes	150

Capítulo 6. Estructura del operador lineal	137
§ 6.0. Terminología y generalidades	157
§ 6.1. Valores propios (autovalores) y vectores propios (autovectores)	158
§ 6.2. Polinomio característico	161
§ 6.3. Subespacios invariantes	167
§ 6.4. Subespacios radicales (principales), forma de Jordán	172
Capítulo 7. Operadores de un espacio unitario	185
§ 7.0. Terminología y generalidades	185
§ 7.1. Operador conjugado, matriz conjugada	189
§ 7.2. Operadores y matrices normales	194
§ 7.3. Operadores y matrices unitarios	198
§ 7.4. Operadores y matrices hermitianos	203
§ 7.5. Operadores y matrices no negativos y definidos positivos	209
§ 7.6. Números singulares y descomposición polar	216
§ 7.7. Descomposición hermitiana	221
§ 7.8. Pseudosoluciones y operador pseudoinverso	224
§ 7.9. Formas cuadráticas	229
§ 7.10. Teoría espectral de los pares de matrices	231
Capítulo 8. Problemas métricos en un espacio lineal	241
§ 8.0. Terminología y generalidades	241
§ 8.1. Espacio lineal normalizado	244
§ 8.2. Normas de operadores y matrices	249
§ 8.3. Normas matriciales y sistemas de ecuaciones lineales	254
§ 8.4. Normas matriciales y valores propios (autovalores)	259
Indicaciones	268
Respuestas y soluciones	283
Índice de materias	343

PREFACIO

El curso conjunto de álgebra lineal y de geometría analítica se enseña a los estudiantes de la Facultad de Matemáticas de Cálculo y Cibernética de la Universidad Lomonósov de Moscú durante los dos primeros semestres. El profesor que imparte esta disciplina confronta grandes dificultades. Para aclararlos hagamos algunas comparaciones con programas de cursos análogos de la Facultad de Matemáticas y Mecánica de la Universidad.

El programa de la Facultad de Matemáticas de Cálculo está constituido por una parte considerable del curso de geometría analítica que se estudia en la Facultad de Matemáticas y Mecánica de la Universidad (excluyendo solamente la clasificación afín de las líneas y superficies de segundo orden, así como de los elementos de la geometría proyectiva) y por un curso completo de álgebra lineal. Este último trata las cuestiones que en la Facultad de Matemáticas y Mecánica generalmente se omiten, tales como, por ejemplo, los números singulares del operador, las pseudosoluciones de sistemas de ecuaciones lineales, etc. La especificidad de la facultad de CNC obliga al profesor a llamar la atención de los estudiantes sobre la inestabilidad de la mayoría de las nociones del álgebra lineal clásica (dependencia lineal, degeneración, estructura de Jordan, etc.) y de sus métodos, así como indicar las vías que conducen a la solución estable de los problemas de álgebra. La realización de este programa exige introducir en el curso elementos de la teoría de espacios lineales normalizados para obtener en adelante resultados métricos concretos: estimación de las perturbaciones de la solución de un sistema de ecuaciones, valores propios de una matriz, etc. Y todo esto debe ser realizado en un tiempo considerablemente más corto que en caso de los cursos del álgebra y la geometría que se dictan en las facultades de Matemáticas y, además, no ha de perderse el nivel de rigurosidad matemática.

Es evidente que sin una modificación sustancial del curso tradicional no resulta posible conseguirlo. El *Álgebra lineal* de V. Voevodin (Editorial Mir, 1986) comprendió un intento precisamente en este sentido. Esta obra refleja la experiencia del autor que impartió conferencias en la facultad de Matemáticas de Cálculo y Cibernética durante muchos años.

Indiquemos algunas particularidades del curso de Voevodin que permiten reducir el tiempo del conferenciante.

La noción del espacio lineal suficientemente preparada por el álgebra vectorial se ofrece al comienzo del curso. Esto elimina el paralelismo tradicional, en cuyo caso la teoría del espacio lineal se enseña prácticamente tres veces: primero, en la geometría analítica aplicada a conjuntos de vectores geométricos, luego en la descripción de la estructura del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en un espacio aritmético y por fin en el caso general.

En los capítulos posteriores la exposición de la geometría y del álgebra también está dada simultáneamente; además, cada nueva noción geométrica argumenta una generalización n -dimensional. Así, por ejemplo, el producto escalar de vectores geométricos sirve de base para la introducción de los espacios euclídeos y unitarios; la fórmula que permite calcular el volumen del paralelepípedo tridimensional impulsa la construcción de la teoría de volúmenes n -dimensionales, de donde se deduce igualmente la teoría del determinante considerado como el volumen de un paralelepípedo orientado en el espacio aritmético; las rectas y los planos de un espacio tridimensional son el motivo que permite introducir la noción de plano en un espacio lineal arbitrario; el problema geométrico de la intersección de hiperplanos facilita revelar la construcción del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. También existen ejemplos de género distinto cuando los resultados geométricos se deducen como simples corolarios de los teoremas algebraicos generales; así ocurre, por ejemplo, en el caso de la clasificación cartesiana de líneas y superficies de 2° orden.

La modificación del curso de conferencias motivó también una reconstrucción considerable de los seminarios. Resulta que uno de los manuales de problemas de álgebra lineal que se utilizan en la URSS —D. Faddéiev, I. Sominski *Problemas de álgebra superior* (Editorial Mir, Moscú, 1980)—, puede aplicarse en forma muy limitada, pues supone que al resolver los problemas de espacios lineales y euclídeos los estudiantes disponen de las nociones del álgebra matricial y de sistemas de ecuaciones lineales. Esta condición, según hemos señalado más arriba, no se cumple en el presente libro. Además, hacían falta problemas para los temas no tradicionales del curso. A todo esto se debe la colección de problemas de álgebra lineal que proponemos y que se adjunta al curso de V. Voevodin.

La estructura de este manual se atiene estrictamente a la de la obra de V. Voevodin. Algunos cambios insignificantes vienen determinados por las particularidades del proceso docente. Así, el párrafo dedicado a los espacios métricos fue incluido en el capítulo 8, por cuanto el tema correspondiente del curso de conferencias se enseña al final del primer semestre y no queda tiempo para «consolidar» en las clases los conocimientos adquiridos.

La sucesión de temas seleccionados en el curso de V. Voevodin