

Editors:

A. Dold, Heidelberg

F. Takens, Groningen

Springer

Berlin

Heidelberg

New York

Barcelona

Budapest

Hong Kong

London

Milan

Paris

Tokyo

P. Biane R. Durrett

Lectures on Probability Theory

Ecole d'Eté de Probabilités
de Saint-Flour XXIII – 1993

Editor: P. Bernard



Springer

Authors

Philippe Biane
Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire de Probabilités
4, Place Jussieu
F-75252 Paris, France

Richard Durrett
Cornell University
Department of Mathematics
Ithaca, NY 14853-7901, USA

Editor

Pierre Bernard
Université Blaise Pascal
Clermont-Ferrand
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
F-63177 Aubière, France

Cataloging-in-Publication Data applied for

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Lectures on probability theory / Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXIII - 1993. P. Biane ; R. Durrett. Ed.: P. Bernard. - Berlin ; Heidelberg ; New York ; London ; Paris ; Tokyo ; Hong Kong : Springer, 1995
(Lecture notes in mathematics ; Vol. 1608)
ISBN 3-540-60015-9 (Berlin ...)
ISBN 0-387-60015-9 (New York ...)
NE: Biane, Philippe; Durrett, Richard; Bernard, Pierre [Hrsg.]; Ecole d'Eté de Probabilités <23, 1993, Saint-Flour>; GT

Mathematics Subject Classification (1991): 60-01, 60-06, 60G60, 60H07, 60J70, 60K35, 81-06, 81S25

ISBN 3-540-60015-9 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in any other way, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is permitted only under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its current version, and permission for use must always be obtained from Springer-Verlag. Violations are liable for prosecution under the German Copyright Law.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1995

Printed in Germany

Typesetting: Camera-ready by authors

SPIN: 10130352

46/3142-543210 - Printed on acid-free paper

INTRODUCTION

This volume contains lectures given at the Saint-Flour Summer School of Probability Theory during the period 18th August - 4th September, 1993.

We thank the authors for all the hard work they accomplished. Their lectures are a work of reference in their domain.

The School brought together 62 participants, 30 of whom gave a lecture concerning their research work.

Below you will find the list of participants and their papers.

Finally, to facilitate research concerning previous schools we give here the number of the volume of "Lecture Notes" where they can be found :

Lecture Notes in Mathematics

1971 : n° 307 - 1973 : n° 390 - 1974 : n° 480 - 1975 : n° 539 -
1976 : n° 598 - 1977 : n° 678 - 1978 : n° 774 - 1979 : n° 876 -
1980 : n° 929 - 1981 : n° 976 - 1982 : n° 1097 - 1983 : n° 1117 -
1984 : n° 1180 - 1985 - 1986 et 1987 : n° 1362 - 1988 : n° 1427 -
1989 : n° 1464 - 1990 : n° 1527 - 1991 : n° 1541 - 1992 : n° 1581

Lecture Notes in Statistics

1986 : n° 50

TABLE OF CONTENTS

Philippe BIANE : "CALCUL STOCHASTIQUE NON-COMMUTATIF"	1
Introduction	4
1. Espaces de probabilité non-commutatifs finis	11
2. Théorie spectrale	22
3. Variables de Gauss et de Poisson et relations de commutation	28
4. Espaces de Fock	41
5. Intégration stochastique non-commutative	52
6. Applications du calcul stochastique non-commutatif	72
Commentaires et bibliographie	89
Références	93
Rick DURRETT : "TEN LECTURES ON PARTICLE SYSTEMS"	97
Preface	98
1. Overview (two lectures)	100
2. Construction, Basic Properties	119
3. Percolation Substructures, Duality	126
4. A Comparison Theorem	138
5. Threshold Models	147
6. Cyclic Models	156
7. Long Range Limits	164
8. Rapid Stirring Limits	171
9. Predator Prey Systems	180
Appendix. Proofs of the Comparison Results	191
References	198

CALCUL STOCHASTIQUE

NON-COMMUTATIF

Philippe BIANE

Sommaire

Introduction	4
1. Espaces de probabilités non-commutatifs finis	11
1.1. Espaces de probabilités	11
1.2. Variables aléatoires, lois	12
1.3. Espace de bernoulli non-commutatif	13
1.4. Addition de variables de Bernoulli quantiques indépendantes	15
1.5. Le processus de spin	17
1.6. Un théorème limite pour la marche de Bernoulli quantique	19
2. Théorie spectrale	22
2.1. Quelques définitions	22
2.2. Résolutions de l'identité et théorème spectral	24
2.3. Opérateurs à trace et espaces de probabilités non-commutatifs	25
2.5. Théorèmes de Stone et de Nelson	26
3. Variables de Gauss et de Poisson et relations de commutation	28
3.1. Relations de commutation d'Heisenberg	28
3.2. Modèle gaussien des relations de commutation	30
3.3 Opérateurs de Weyl	31
3.4. Vecteurs exponentiels	32
3.5. Opérateur de nombre et loi de Poisson	33
3.6. Modèle poissonien des relations de commutation	35
3.7. Théorème de Stone-von Neumann	36
3.8. Conséquences du théorème de Stone-von Neumann	39
4. Espaces de Fock	41
4.1. Puissances symétriques d'un espace de Hilbert	41
4.2. Opérateurs de création et d'annihilation	43
4.3. Seconde quantification	44
4.4. Opérateurs de Weyl sur l'espace de Fock	45
4.5. Interprétations gaussienne et poissonienne de l'espace de Fock	47
4.6. Mouvement brownien et processus de Poisson	49
4.7. Martingales normales et représentations chaotiques	51

5. Intégration stochastique non-commutative	52
5.1. Filtration et processus adaptés sur l'espace de Fock	52
5.2. Intégration de processus simples	53
5.3. Divergence et gradient sur l'espace $\Gamma(L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}_+))$	56
5.4. Intégrale stochastique et formule d'Itô	58
5.5. Exemples d'intégrales stochastiques	68
5.6. Extensions de l'intégrale stochastique	68
6. Applications du calcul stochastique non-commutatif	72
6.1. Processus de Markov non-commutatif	72
6.2. Une autre construction de la marche de Bernoulli quantique	75
6.3. Equations différentielles linéaires	78
6.4. Dilatations de semi-groupes complètement positifs	82
6.5. Application aux processus de Markov	84
Commentaires et bibliographie	89
Références	93

Introduction

Le calcul stochastique non-commutatif s'est développé depuis quelques années à la suite des travaux de Hudson et Parthasarathy [40], qui ont défini des intégrales stochastiques par rapport à trois "martingales non-commutatives" a_t^+ , a_t^- , et a_t^0 . Ces trois processus ne sont pas composés de variables aléatoires au sens classique, mais sont des familles d'opérateurs sur l'espace L^2 de la mesure de Wiener. Le théorème spectral permet d'interpréter les combinaisons auto-adjointes de ces opérateurs comme des variables aléatoires, et le fait qu'ils ne commutent pas entre eux, leur permet d'avoir des propriétés remarquables; par exemple, le processus $(a_t^+ + a_t^-)_{t \geq 0}$ s'interprète comme un mouvement brownien ou, plus exactement, chaque opérateur $a_t^+ + a_t^-$ est l'opérateur de multiplication par la variable aléatoire B_t , où $(B_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement brownien canonique sur l'espace de Wiener. D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}$ $(a_t^0 + za_t^+ + \bar{z}a_t^- + |z|^2t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $|z|^2$, au sens où ces opérateurs s'interprètent comme les opérateurs de multiplication définis par un processus de Poisson sur son espace L^2 , lorsqu'on a identifié l'espace L^2 de la mesure de Wiener et celui d'un processus de Poisson au moyen des décompositions en chaos. Il est clairement impossible d'obtenir de telles propriétés en utilisant des familles de variables aléatoires au sens habituel du terme. Toutes les notions évoqués ci-dessus seront expliquées en détails dans la suite du cours.

La motivation initiale du calcul stochastique non-commutatif était d'utiliser les techniques d'équations différentielles stochastiques pour résoudre des problèmes de mécanique quantique, mais il s'est avéré que la théorie ainsi développée est intéressante par elle-même et donne un point de vue nouveau sur certains aspects des probabilités classiques. C'est ainsi que la formule d'Itô y apparaît comme intimement liée aux relations de commutation d'Heisenberg qui jouent un rôle fondamental en mécanique quantique. Un sous-produit remarquable de ce calcul stochastique est la possibilité d'obtenir, en principe, tout processus de Markov comme solution d'une équation différentielle stochastique qui a la même structure formelle que celle d'une diffusion, les mouvements browniens qui dirigent l'équation étant remplacés par une version multidimensionnelle des "processus non-commutatifs" a_t^+ , a_t^- , et a_t^0 (en fait pour avoir ce résultat en toute généralité il faut affronter des problèmes analytiques qui ne sont pas encore complètement résolus). On verra à la fin du cours des exemples explicites de telles constructions, dont celui des chaînes de Markov en temps continu sur un espace d'état fini, pour lequel la théorie est complète. Il apparaît que ce sont les sauts des processus de Markov qui nécessitent l'introduction de martingales non-commutatives dans l'équation différentielle stochastique.

Le but de ce cours est de présenter, à un public de probabilistes, les bases de cette théorie qui est actuellement en plein développement. L'expérience de plusieurs exposés devant des probabilistes "classiques" m'a appris que l'évocation des "variables aléatoires non-commutatives" avait tendance à plonger l'auditoire dans la perplexité. Ma première tâche va donc être de tenter de démythifier cette notion, et pour cela je vais commencer par évoquer son origine, qui est au coeur de la mécanique quantique.

C'est à von Neumann [56] que l'on doit d'avoir dégagé le formalisme mathématique de la mécanique quantique, après les travaux de nombreux physiciens dont W.Heisenberg, E.Schrödinger, et M.Born. Le postulat de base est que tout système physique peut être décrit par un espace de Hilbert complexe H et un vecteur $\psi \in H$ de norme 1 (que l'on appelle l'état du système). Souvent, le système considéré est très simple, par exemple il peut consister en une seule particule dans un espace vide, auquel cas un choix plausible de H est l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$, (si on ne tient pas compte du spin) et ψ s'appelle alors la fonction d'onde de la particule. Mais rien n'empêche en théorie de traiter des systèmes complexes composés d'un grand nombre de particules; on a alors affaire à de "gros" espaces de Hilbert, et à des fonctions d'onde compliquées que l'on ne peut pas, en général, expliciter.

A toute quantité physique du système que l'on peut mesurer au moyen d'une expérience correspond un opérateur auto-adjoint A sur H . D'après le théorème spectral il existe une mesure μ_ψ sur le spectre $\sigma(A)$ telle que $\mu_\psi(f) = \langle f(A)\psi, \psi \rangle$ pour toute fonction borélienne bornée sur $\sigma(A)$, $f(A)$ étant défini par le calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints. Lorsque A a un spectre discret formé de valeurs propres λ_i de multiplicité 1, cette mesure de probabilité est simple à décrire, on a $\mu_\psi(\{\lambda_i\}) = |\langle \psi, \phi_i \rangle|^2$, ϕ_i étant un vecteur propre de norme 1 associé à λ_i . On postule que le résultat d'une mesure de la quantité physique correspondant à A est une variable aléatoire de loi μ_ψ lorsque le système est dans l'état ψ . En particulier, cette loi n'est une mesure de Dirac que lorsque le vecteur ψ est un vecteur propre de A . Un autre postulat ("réduction du paquet d'ondes") énonce qu'après la mesure de la quantité correspondant à l'opérateur A , si cette mesure a donné comme résultat λ (où λ est une valeur propre de A de vecteur propre correspondant ϕ), le système se trouve dans l'état ϕ .

La mécanique quantique est une théorie intrinsèquement probabiliste, car il existe des systèmes physiques pour lesquels la connaissance exacte de toutes les données (i.e. de la fonction d'onde du système) ne permet pas de prédire avec certitude le résultat d'une expérience.

Pour les lecteurs qui ne sont pas familiers avec la mécanique quantique, je vais illustrer les postulats ci-dessus par la description d'expériences de physique (comme dans Feynman [35]) inspirées de celle de Stern et Gerlach, et en donner une interprétation avec les postulats de la mécanique quantique. Cette description nous permettra de rencontrer un premier exemple de variable aléatoire "non-commutative", exemple sur lequel on reviendra au chapitre 1.

On suppose donné un dispositif produisant un faisceau linéaire horizontal de particules de même nature (par exemple des atomes d'hydrogène, ou des molécules d'azote, ...), que l'on envoie à travers un appareil qui crée un champ magnétique ayant un fort gradient vertical. A la sortie de l'appareil, on constate que le faisceau de particules s'est scindé en plusieurs sous-faisceaux présentant des déviations verticales

par rapport à la direction initiale (voir *fig. 1*).

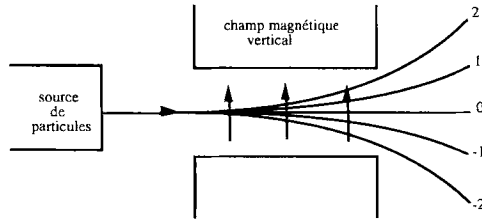
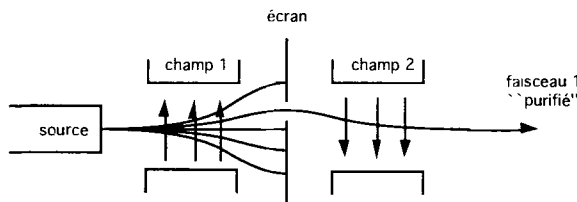


fig. 1

Les déviations de ces faisceaux par rapport à la direction initiale sont des multiples entiers d'une même quantité. Cette quantité ainsi que le nombre de faisceaux sont des caractéristiques du type des particules utilisées, elles ne dépendent pas de la direction du champ magnétique, si celui-ci reste orthogonal au faisceau. Si le faisceau initial se scinde en N faisceaux, la particule est dite de spin J où J est le demi-entier $J = \frac{N-1}{2}$ (dans le cas de la figure 1, le spin est 2). On interprète cette expérience en postulant que chaque particule possède un "moment magnétique" dont la composante suivant l'axe vertical est un multiple demi-entier d'une certaine quantité, ce demi-entier étant de la forme $-J, -J+1, \dots, J$. (C'est cette propriété de quantification de certaines quantités physiques associées aux particules élémentaires qui a donné son nom à la mécanique quantique).

On peut modifier cette expérience en faisant passer les faisceaux à travers un second appareil, placé juste à la sortie du premier, et créant un champ magnétique opposé, de façon à remettre les particules dans leur direction initiale. En disposant judicieusement des caches entre les deux champs magnétiques, on peut filtrer les faisceaux de manière à n'en garder qu'un.

fig. 2



En faisant passer un tel faisceau "purifié" à travers un troisième champ vertical, on constate qu'il ne se sépare plus et qu'il dévie de la même valeur qu'auparavant. Ce procédé permet donc de sélectionner les particules suivant la valeur de leur moment

magnétique vertical (*fig. 3*).

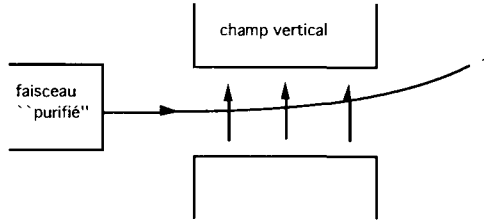


fig. 3

Afin de simplifier la discussion, je vais maintenant supposer que les particules ont un spin $J = \frac{1}{2}$, c'est à dire que le moment magnétique d'une telle particule suivant une direction donnée ne peut prendre que les valeurs $+1$ ou -1 dans une unité de mesure convenable. Au moyen du procédé décrit ci-dessus on se donne un faisceau de telles particules de moment magnétique vertical $+1$, que l'on fait passer à travers un champ magnétique faisant un angle Δ avec la verticale (*fig. 4*, $\Delta \in [0, \frac{\pi}{2}]$).

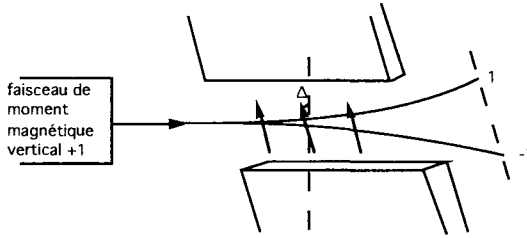


fig. 4

On constate que le faisceau s'est séparé en deux. Si l'on mesure l'intensité de chaque faisceau (c'est à dire la proportion de particules du faisceau initial dans chacun des deux faisceaux de sortie), on obtient respectivement les valeurs $\cos^2 \frac{\Delta}{2}$ et $\sin^2 \frac{\Delta}{2}$. Utilisons un dispositif analogue à celui de la figure 2 pour sélectionner les particules de la figure 4 qui ont un moment magnétique $+1$ dans la direction Δ . Si maintenant on fait passer à nouveau ces particules dans un champ magnétique vertical, on constate que le faisceau se sépare en 2, autrement dit, après être passées dans le champ magnétique non vertical les particules ont "oublié" leur moment magnétique vertical. On peut recommencer l'expérience avec des directions arbitraires, à chaque fois le résultat est le suivant: si on a sélectionné un faisceau de particules ayant un moment magnétique $+1$ dans la direction D , et que l'on mesure leurs moments magnétiques dans la direction D' faisant un angle Δ avec D , on trouve $+1$ et -1 avec des proportions respectives de $\cos^2 \frac{\Delta}{2}$ et $\sin^2 \frac{\Delta}{2}$. Pour essayer d'expliquer ces expériences de manière classique il faudrait pour chaque particule introduire une famille de variables aléatoires indexées par les directions de l'espace, et prenant les valeurs $\{-1, +1\}$, qui changeraient de façon compliquée par un passage au travers d'un champ magnétique. L'interprétation quantique, elle, ne

fait intervenir que des vecteurs de dimension 2 et des matrices 2×2 . Voici cette interprétation. L'espace de Hilbert qui décrit le moment magnétique d'une particule est de dimension 2. Chaque particule du faisceau a un état qui est un vecteur colonne $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avec $u \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}$. A chaque direction de l'espace \mathbb{R}^3 , on associe une matrice 2×2 , la direction de vecteur unitaire (x, y, z) étant associée à la matrice $\begin{pmatrix} z & y + ix \\ y - ix & -z \end{pmatrix}$. La mesure d'un moment magnétique dans la direction (x, y, z) correspond à l'opérateur auto-adjoint de matrice $\begin{pmatrix} z & y + ix \\ y - ix & -z \end{pmatrix}$. D'après les postulats de la mécanique quantique, si une particule est dans l'état $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, la mesure du moment magnétique dans la direction (x, y, z) est une variable aléatoire qui vaut 1 avec probabilité $|\langle \psi, \alpha_+ \rangle|^2$ et -1 avec probabilité $|\langle \psi, \alpha_- \rangle|^2$, où α_+ et α_- sont des vecteurs propres unitaires de $\begin{pmatrix} z & y + ix \\ y - ix & -z \end{pmatrix}$ de valeurs propres respectives $+1$ et -1 . D'autre part, si le résultat de la mesure a donné $+1$ (ou -1), après cette mesure, la particule se trouve dans l'état α_+ (ou α_-). Reprenons l'exemple des expériences décrites ci-dessus.

La mesure du moment magnétique vertical est donnée par l'opérateur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les particules de moment magnétique $+1$ dans cette direction sont donc dans l'état $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le moment magnétique dans la direction $(0, \sin\Delta, \cos\Delta)$ est mesuré par l'opérateur $\begin{pmatrix} \cos\Delta & \sin\Delta \\ \sin\Delta & -\cos\Delta \end{pmatrix}$, de vecteurs propres $\alpha_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\Delta}{2} \\ \sin\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}$ $\alpha_- = \begin{pmatrix} \sin\frac{\Delta}{2} \\ \cos\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}$. Le résultat de la mesure est donc une variable de Bernoulli de probabilités: $P(1) = |\langle e_1, \alpha_+ \rangle|^2 = \cos^2\frac{\Delta}{2}$ et $P(-1) = |\langle e_1, \alpha_- \rangle|^2 = \sin^2\frac{\Delta}{2}$, comme le montre l'expérience. Un calcul semblable avec des directions arbitraires dans l'espace permet de retrouver tous les résultats de l'expérience.

Cet exemple nous a permis de rencontrer pour la première fois des "variables de Bernoulli quantiques". Nous les étudierons plus en détails au chapitre 1 du cours.

Après cette brève incursion dans la physique des particules, nous allons nous concentrer sur l'aspect purement mathématique des probabilités quantiques. Le plan du cours suit un chemin parallèle à celui d'un cours de probabilités classique, partant des probabilités élémentaires sur un ensemble fini, passant aux variables "continues" avec le théorème central limite, puis aux processus stochastiques, (mouvement brownien, processus de Poisson), et enfin à l'intégration stochastique.

On commence au chapitre 1 par définir la notion d'espace de probabilité non-commutatif fini, et les variables aléatoires sur un tel espace. Il s'agit en fait simplement d'algèbre linéaire de dimension finie, mais l'interprétation probabiliste que l'on en fait amène à des considérations intéressantes. Alors que la théorie élémentaire des probabilités utilise essentiellement la combinatoire et le dénombrement (voir Feller [34]), ces méthodes sont remplacées ici par l'algèbre linéaire. Même dans une situation aussi simple on voit rapidement apparaître des effets "quantiques" non-triviaux comme on le montre en étudiant la marche de Bernoulli quantique, un analogue non-commutatif du jeu de pile ou face, et le "processus de spin" associé. A

la fin du chapitre 1, on démontre un théorème limite qui contient les deux théorèmes limite en loi sur les sommes de variables de Bernoulli, d'une part le théorème de Moivre-Laplace, d'autre part le théorème de convergence vers la loi de Poisson. On verra que le formalisme non-commutatif permet de réunir ces deux résultats en un seul. Les variables limites obtenues joueront un rôle fondamental par la suite.

L'énoncé du théorème limite montre la nécessité de sortir du cadre de la dimension finie, pour traiter aussi bien des variables continues, comme les gaussiennes, que des variables discrètes prenant une infinité de valeurs, comme les variables de Poisson. Cela est rendu possible grâce à la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints dont les principaux résultats sont rappelés au chapitre 2.

Avec le chapitre 3 on rentre dans le vif du sujet en étudiant de façon approfondie les objets introduits à la fin du chapitre 1, qui sont connus en physique quantique sous le nom d'opérateurs de création, d'annihilation, et de nombre. Le chapitre 4 est consacré aux espaces de Fock qui fournissent un moyen canonique de construire des familles d'opérateurs de création, annihilation et nombre. Ce chapitre contient des notions qui sont bien connues des spécialistes du calcul de Malliavin (cf par exemple Watanabe [87]), seul le langage dans lequel elles sont exprimées est un peu différent. C'est dans ce chapitre que l'on introduit les processus a_t^+ , a_t^- , et a_t^0 de Hudson et Parthasarathy.

Dans le chapitre 5, on aborde le calcul stochastique non-commutatif proprement dit, inspiré du calcul stochastique d'Itô. On verra que ce nouveau calcul stochastique est très lié à l'intégrale de Skorokhod (voir Skorokhod [80]), une extension de l'intégrale d'Itô, qui est en fait un objet purement Hilbertien, défini comme une divergence, comme l'on remarqué Gaveau et Trauber [36]. Dans le chapitre 6 on montre comment ce calcul permet de construire explicitement des processus de Markov non-commutatifs, cette notion étant une extension de la notion usuelle de processus de Markov. Dans le cas particulier des processus de Markov au sens habituel, cette construction permet d'étendre à des processus de Markov non-nécessairement continus la construction des diffusions à l'aide d'équation différentielles stochastiques. On décrira comment fonctionne ce formalisme dans le cas simple des processus de naissance et des chaînes de Markov sur un espace d'états fini.

Un dernier chapitre est consacré à des commentaires et des compléments, ainsi qu'aux références bibliographiques.

Les connaissances requises pour lire le cours se limitent à une bonne familiarité avec les notions de base de probabilité et de théorie des opérateurs (théorie spectrale), mais en pratique il serait utile d'avoir une bonne connaissance du calcul stochastique usuel comme exposé par exemple dans [17], [21] ou [69]. En particulier, les sujets suivants, populaires parmi les probabilistes, utilisent des notions très proches: calcul de Malliavin et analyse sur l'espace de Wiener, intégrale de Skorokhod, équations différentielles stochastiques. La théorie des représentations des groupes est présente implicitement dans une grande partie du cours, mais on ne l'utilise pas vraiment (sauf au paragraphe 6.2). Le point de vue des groupes est beaucoup plus présent dans le livre de Parthasarathy [60].

Je remercie vivement les organisateurs de l'École d'été de Saint-Flour de m'avoir donné la possibilité de faire ce cours. Je suis également reconnaissant à tous ceux qui ont bien voulu faire des commentaires sur la première version du cours, et je remercie tout particulièrement Monique Pontier dont les suggestions ainsi que les

corrections qu'elle m'a indiquées m'ont considérablement aidé, et Jacques Azéma pour sa lecture critique et méticuleuse de la première version du cours.

Chapitre 1

Espaces de probabilité non-commutatifs finis

1.1 Espaces de probabilités

Ce chapitre est consacré à la notion d'espace de probabilité non-commutatif, en commençant par l'exemple le plus simple, qui est l'analogie d'un espace de probabilité usuel fini. Comme indiqué dans l'introduction l'idée de base, qui a son origine dans la mécanique quantique, est qu'un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert peut s'interpréter comme une variable aléatoire. Pour préciser cette correspondance, commençons par montrer comment associer à une variable aléatoire un opérateur auto-adjoint.

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité fini, avec la tribu formée de toutes les parties de Ω . L'espace des variables aléatoires complexes $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est muni de sa structure d'espace de Hilbert complexe de dimension finie. Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{F}, P) , on définit un opérateur auto-adjoint

$$T_X : L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

$$f \mapsto Xf$$

$L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a une base orthonormale $(\delta_{\omega} = \frac{\chi_{\omega}}{\sqrt{P(\{\omega\})}})_{\omega \in \Omega}$ où χ_{ω} désigne la fonction indicatrice de ω (on suppose que $P(\{\omega\}) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$). Dans cette base, l'opérateur T_X est diagonal, ses valeurs propres sont les valeurs prises par la variable aléatoire X , puisque $T_X(\delta_{\omega}) = X(\omega)\delta_{\omega}$. De plus, l'espérance de la variable aléatoire X est donnée par la formule $E[X] = \langle X1, 1 \rangle$ où 1 désigne la variable identiquement égale à 1.

Réciproquement, donnons nous un opérateur auto-adjoint A sur un espace de Hilbert complexe E de dimension finie, et $(\varphi_i)_{i \in I}$, $I = \{1, \dots, n\}$ une base orthonormale de vecteurs propres de A , correspondant aux valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ (avec éventuellement des répétitions en cas de valeurs propres de multiplicité > 1). Soit $u \in E$ un vecteur unitaire, il détermine une loi de probabilité μ sur (I, \mathcal{I}) (I est muni de la tribu maximale \mathcal{I}) en posant $\mu(\{i\}) = |\langle u, \varphi_i \rangle|^2$, ainsi qu'une isométrie $\iota : l^2(I, \mathcal{I}, \mu) \rightarrow E$ qui envoie χ_i sur $\langle u, \varphi_i \rangle \varphi_i$. Soit X la variable aléatoire sur (I, \mathcal{I}) définie par $X(i) = \lambda_i$, alors $A = \iota \circ T_X \circ \iota^*$, donc l'opérateur A s'interprète comme un opérateur de multiplication par la variable aléatoire X . De plus, l'espérance de X s'exprime à l'aide de A par la formule $E[X] = \langle Au, u \rangle$.

Les deux exemples ci-dessus montrent comment on peut passer de la donnée de (E, u, A) , E étant un espace de Hilbert u un vecteur unitaire de E et A un opérateur auto-adjoint sur E à celle de $(\Omega, \mathcal{F}, P, X)$ où (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace de probabilités et X une variable aléatoire. Le principe des probabilités quantiques consiste à considérer la première donnée comme fondamentale, et à remplacer l'espace de probabilité usuel par un couple (E, u) et les variables aléatoires par les opérateurs auto-adjoints sur E .

Prendre l'espérance d'une variable aléatoire correspond alors à appliquer la forme linéaire $A \mapsto \langle Au, u \rangle$. Comme en probabilités classiques, où l'on a parfois besoin de considérer plusieurs probabilités sur le même espace, on veut pouvoir considérer simultanément des vecteurs unitaires u_1, \dots, u_n . Lorsqu'on fait une combinaison convexe des fonctionnelles $A \mapsto \langle Au_k, u_k \rangle$ définies sur $\mathcal{L}(E)$ l'espace des opérateurs sur E , on n'obtient pas une fonctionnelle du type $A \mapsto \langle Au, u \rangle$. Observons que $\langle Au, u \rangle = \text{tr}(A\pi_u)$, tr étant la forme linéaire donnant la trace d'un opérateur, et π_u le projecteur orthogonal sur la droite engendrée par u . On voit donc que si $\sum_k p_k = 1$, $\sum_k p_k \langle Au_k, u_k \rangle = \text{tr}(AS)$ où $S = \sum_k p_k \pi_{u_k}$ est un opérateur positif de trace 1. En fait, tout opérateur positif de trace 1 s'obtient de cette façon.

Donnons une première définition.

DÉFINITION 1 – Un espace de probabilité non-commutatif fini est la donnée d'un espace de Hilbert de dimension finie, E et d'un opérateur positif S sur E , de trace 1. La forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ (l'espace des opérateurs sur E) donnée par

$$A \mapsto \text{tr}(AS)$$

est appelée l'état correspondant à S .

Par abus de langage, on confondra parfois l'opérateur S avec l'état qu'il définit. L'ensemble des états est une partie convexe compacte du dual de $\mathcal{L}(E)$, dont les points extrémaux sont les états de la forme $A \mapsto \langle Au, u \rangle$ (appelés aussi états purs), où u est un vecteur de norme 1. Un état pur est associé à un opérateur π_u qui est le projecteur orthogonal sur la droite engendrée par u ; en particulier, deux vecteurs unitaires déterminent le même état si et seulement s'ils sont colinéaires. Remarquons tout de suite que tout état est combinaison convexe d'un nombre fini d'états purs mais qu'il n'y pas unicité de la décomposition (par exemple l'état associé à $\frac{1}{\dim(E)} \text{Id}$ est égal à $\frac{1}{\dim(E)} \sum_i \pi_{u_i}$ pour toute base orthonormale (u_i) de E).

1.2 Variables aléatoires, lois

Après avoir introduit les espaces de probabilité, passons aux variables aléatoires.

DÉFINITION 2 – Une variable aléatoire non-commutative sur l'espace de probabilité non-commutatif fini (E, S) est un opérateur auto-adjoint sur E .

Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on parlera de variable aléatoire tout court.

L'exemple du paragraphe 1.1 montre que toute variable aléatoire réelle au sens usuel peut être considérée comme une variable aléatoire non-commutative, en la faisant agir par multiplication sur un espace L^2 . Soit A une variable aléatoire non-commutative, appelons $\sigma(A)$ son spectre, et soit f une fonction réelle sur $\sigma(A)$. On définit un opérateur autoadjoint en posant $f(A)x = f(\lambda)x$ pour tout $\lambda \in \sigma(A)$ et x vecteur propre de A de valeur propre λ .

DÉFINITION 3 – La loi de la variable A dans l'état S est la mesure de probabilité sur $\sigma(A)$ donnée par la formule:

$$\mu(f) = \text{tr}(f(A)S)$$

pour toute fonction f sur $\sigma(A)$.

Soit $\lambda \in \sigma(A)$ on a $\mu(\{\lambda\}) = \text{tr}(S\pi_\lambda)$ où π_λ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre associé à λ . On vérifie immédiatement en reprenant l'exemple du paragraphe 1.1 que $T_{f(X)} = f(T_X)$ et que la loi de T_X dans l'état pur 1 (ici 1 désigne la fonction constante égale à 1) est bien la loi de la variable aléatoire X . Les notions de variable aléatoire et de loi que nous venons de définir sont donc des extensions des notions usuelles. La première différence avec la théorie des probabilités classiques apparait quand on essaie d'appliquer les opérations algébriques élémentaires. En effet, alors qu'on peut toujours faire le produit de deux variables aléatoires usuelles, le produit de deux opérateurs auto-adjoints n'est auto-adjoint que s'ils commutent. Nous allons examiner plus en détail ce dernier cas. Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints qui commutent, on peut décomposer E en somme directe de sous-espaces propres communs à A et B . Soit $(E_{\lambda,\nu})_{\lambda \in \sigma(A), \nu \in \sigma(B)}$ une telle décomposition on peut définir $f(A, B)$ pour une fonction f sur $\sigma(A) \times \sigma(B)$ par $f(A, B)x = f(\lambda, \nu)x$ si $x \in E_{\lambda,\nu}$. Ce calcul fonctionnel respecte l'addition et la multiplication des fonctions, ce qui fait qu'on peut définir la loi jointe de A et B qui est la mesure sur $\sigma(A) \times \sigma(B)$ déterminée par

$$\mu_{A,B}(f) = \text{tr}(f(A, B)S)$$

Plus généralement, une famille $(X_t)_{t \in T}$ d'opérateurs auto-adjoints qui commutent admet un calcul fonctionnel qui permet de définir leur loi jointe.

DÉFINITION 4 – Une famille d'opérateurs sur un espace de Hilbert, indexée par un ensemble T (le temps) est appelée un processus stochastique non-commutatif. Si ces opérateurs sont auto-adjoints et commutent, le processus est dit classique.

DÉFINITION 5 – La loi d'un processus classique $(X_t)_{t \in T}$ est la loi jointe des variables $(X_t)_{t \in T}$, c'est à dire la mesure de probabilité sur $\prod_{t \in T} \sigma(X_t)$ déterminée par la forme linéaire

$$f \mapsto \text{tr}(Sf((X_t)_{t \in \mathbb{R}}))$$

sur l'ensemble des fonctions cylindriques bornées sur $\prod_{t \in T} \sigma(X_t)$.

Lorsqu'on considère des opérateurs non auto-adjoints, ou qui ne commutent pas entre eux, la notion de loi jointe de ces opérateurs n'a pas de sens.

Dans la suite du cours, nous allons rencontrer de nombreuses familles d'opérateurs auto-adjoints qui commutent, et calculer les lois des processus classiques correspondants. Un des aspects remarquables de ces processus sera leur construction à partir d'opérateurs qui ne commutent pas entre eux, et pour lesquels la notion de "loi jointe" n'a pas de sens.

1.3 Espace de Bernoulli non-commutatif

Nous allons maintenant étudier plus en détail l'exemple le plus simple d'espace de probabilité non-commutatif, en considérant l'espace de Hilbert $E = \mathbb{C}^2$ avec sa base canonique (e_1, e_2) , et le produit hermitien usuel.

Les opérateurs linéaires sur E sont représentés dans la base canonique par des matrices 2×2 . Un état se représente par une matrice de la forme:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{z} \\ z & 1 - \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \quad z \in \mathbb{C} \quad \alpha(1 - \alpha) \geq z\bar{z}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (1)$$

Lorsque $\alpha(1 - \alpha) = z\bar{z}$, S est un projecteur orthogonal sur une droite complexe, l'état associé est donc un état pur.

Les variables aléatoires forment un espace vectoriel réel de dimension 4, noté V . La formule $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(AB^*)$ définit un produit hermitien sur $M_2(\mathbb{C})$ dont la restriction à V est un produit euclidien. Une base orthogonale de V est donnée par les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Les matrices σ_x , σ_y , σ_z sont connues en physique sous le nom de matrices de Pauli, et nous les avons rencontrées dans l'introduction, elles servent à décrire les particules de spin $\frac{1}{2}$. Ces matrices ne commutent pas entre elles mais vérifient les relations suivantes

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x \quad (3)$$

(Dans la suite, la notation $[X, Y]$ désigne le commutateur $XY - YX$).

Nous aurons également besoin des matrices adjointes l'une de l'autre

$$\delta^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \delta^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

grâce auxquelles on peut représenter les autres

$$I = \delta^+\delta^- + \delta^-\delta^+, \quad \sigma_x = \delta^+ + \delta^-, \quad \sigma_y = i(\delta^+ - \delta^-) \quad \sigma_z = \delta^-\delta^+ - \delta^+\delta^- \quad (5)$$

Le groupe des matrices 2×2 unitaires agit par conjugaison sur l'espace V . Pour toute matrice U unitaire, l'application $A \mapsto UAU^*$ est \mathbb{R} -linéaire sur V et préserve le produit des matrices, le passage à l'adjoint, et donc la forme hermitienne scalaire et les relations de commutation. Quitte à conjuguer par une telle matrice, on pourra supposer que l'état S est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \quad \text{avec } p + q = 1, \quad p \geq q \geq 0$$

ce que nous ferons par la suite.

Les deux cas extrémaux $p = 1$ et $p = \frac{1}{2}$ sont particulièrement intéressants. Le premier correspond à l'état pur associé au vecteur e_0 , le second est une trace, c'est à dire que l'on a $\text{tr}(SAB) = \text{tr}(SBA)$ pour tout couple d'opérateurs (A, B) (c'est d'ailleurs le seul état qui vérifie cette propriété).

Terminons ce chapitre en calculant la loi d'une variable aléatoire

$$A = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z + tId \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

dans l'état S . Le spectre de A est composé de deux points,

$$\sigma(A) = \{t \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\}$$