

Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars

Edited by A Dold Heidelberg and B Eckmann, Zurich

81

J.-P. Eckmann · M. Guenin

Institut de Physique Théorique, Université de Genève

Méthodes Algébriques
en Mécanique Statistique

1969



Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York

Préface

Ces notes sont basées sur un cours de mécanique statistique, donné par M. Guenin pendant le semestre d'hiver 1967-68 dans le cadre du 3e cycle des universités de Genève, Lausanne et Neuchâtel. Il s'adressait à des étudiants ayant déjà suivi un cours du 2e cycle en mécanique statistique et possédant les rudiments de l'analyse fonctionnelle et de la topologie. Le but était avant tout de les familiariser à un langage nouveau, afin de leur rendre accessible un champ de recherche très actif.

Ce cours n'est donc pas à considérer comme un traité, mais seulement comme une introduction à l'emploi des méthodes algébriques en mécanique statistique. On trouvera relativement peu de démonstrations, néanmoins nous avons essayé de rendre ce texte compréhensible en lui-même.

Ces notes ont été rédigées après chaque cours par J.-P. Eckmann et distribuées aux étudiants. Nous n'y avons apporté que de très minimes corrections.

La bibliographie est donnée en général dans le texte, une bibliographie supplémentaire se trouve à la fin. Dans l'ensemble, elle reflète l'état de la théorie à fin février 1968.

Finalement, nous tenons à recommander un livre qu'écrit D. Ruelle et qui paraîtra prochainement.

Genève, Août 1968

M. Guenin
J.-P. Eckmann

3. Systèmes quantiques de spins	102
4. Propriétés des réseaux et évolution dans le temps	108
Evolution dans le temps	108
Description d'un réseau de spins quantique (à 3 dimensions)	113
<u>APPENDICE I</u>	118
Exemple d'un système faiblement asymptotiquement abélien qui n'est pas asymptotiquement abélien	118
<u>APPENDICE II</u>	121
Exemple d' E_{III} - état	121
<u>STRUCTURES</u>	124
<u>TERMINOLOGIE</u>	125
<u>REFERENCES</u>	128

Introduction

Ce cours est consacré à la formulation algébrique des problèmes de la mécanique statistique, et plus spécialement de la mécanique statistique quantique.

La première partie du cours est consacrée à une introduction aux méthodes mathématiques que nous utiliserons et qui ne font pas encore partie du bagage standard des physiciens.

Dans la deuxième partie (structures fondamentales), nous avons essayé de dériver chaque structure par la démarche suivante, à savoir d'abord formuler l'idée physique, puis la traduire en propriétés algébrique pour un exemple simple, et finalement en abstraire une structure mathématique et en discuter les généralisations.

La troisième partie décrit des modèles, comme le gaz de Bose et les réseaux de spin.

La formulation algébrique des théories quantiques est en fait presque aussi vieille que la mécanique quantique elle-même puisqu'il est facile de la faire remonter à la mécanique des matrices de Heisenberg. L'extension à une formulation plus abstraite et générale est donc naturelle, et l'on espère en tirer de nouveaux points de vue sur les résultats connus et les problèmes pas encore résolus.

L'approche que nous allons étudier dans ce cours est assez récente. Dans le cas de la mécanique statistique, elle n'est, en effet, que vieille de cinq ou six ans. Il faut tout de même remarquer que cette approche est avant tout la transposition de l'approche analogue développée précédemment pour la théorie quantique des champs. Les spécialistes de la mécanique statistique ne devront donc pas trop s'étonner de ce que les buts poursuivis et la terminologie leur paraissent quelque peu étrangère. En effet, presque tous les chercheurs dans ce domaine sont des théoriciens des champs.

La difficulté principale à surmonter dans ce cours est la question de langage. Une fois la barrière de langage surmonté, nous sommes sûrs que vous trouverez dans l'approche algébrique une manière de penser qui est très attrayante - c'est du moins l'expérience de ceux qui ont travaillé dans ce domaine.

Première partie : INTRODUCTION MATHÉMATIQUE

1. Définitions

Définition : Un ensemble d'éléments \mathcal{A} est une algèbre associative sur les complexes \mathbb{C} , si

- (i) \mathcal{A} est un espace vectoriel.
- (ii) une opération de multiplication est définie dans \mathcal{A} avec les propriétés suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha (ab) = (\alpha a) b \\ a (\alpha b) = \alpha (ab) \end{array} \right\} \text{ multiplication bilinéaire}$$
$$\begin{array}{l} a (bc) = (ab) c \quad \text{associativité} \\ a (b+c) = ab + ac \quad \text{distributivité} \\ (a+b) c = ac + bc \end{array}$$
$$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Nous dirons simplement algèbre, puisque toutes les algèbres que nous rencontrerons dans ce cours seront associatives.

Définition : On dit que a et b commutent si $ab = ba$. Si tous les éléments d'une algèbre commutent deux à deux elle est dite abélienne.

Définition : Le centre Z d'une algèbre est l'ensemble des éléments de \mathcal{A} qui commutent avec tous les éléments de \mathcal{A} , c'est-à-dire

$$Z = \left\{ c \mid c \in \mathcal{A}, ca = ac \quad \forall a \in \mathcal{A} \right\}$$

Z est une sous-algèbre abélienne de \mathcal{A} .

Exemple : Dans l'algèbre $M_2(\mathbb{C})$ des matrices 2 x 2 complexes,

$$Z = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

Exemple : Dans l'algèbre des matrices définie sur un corps K (commutatif) de la forme

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{c} n \\ \hline A \\ \hline m \end{array} & \begin{array}{c} m \\ \hline O \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} m \\ \hline O \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} B \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 , \quad \mathbb{Z} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{c} n \\ \hline \alpha \quad O \\ \hline O \quad \alpha \end{array} & \begin{array}{c} m \\ \hline O \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} m \\ \hline O \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \beta \quad O \\ \hline O \quad \beta \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \alpha, \beta \in K$$

Définitions : Identité

e est un élément identité de l'algèbre \mathcal{A} , si $ae=ea=a, \forall a \in \mathcal{A}$.

g est un élément identité à gauche de \mathcal{A} , si $ga=a, \forall a \in \mathcal{A}$.

d est un élément identité à droite de \mathcal{A} , si $ad=a, \forall a \in \mathcal{A}$.

Exemple : Dans l'algèbre des matrices, définie sur un corps K , de la forme $\begin{pmatrix} aa \\ bb \end{pmatrix}$, les identités à droite sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in K$$

Proposition : L'élément identité d'une algèbre est unique.

Démonstration : Soient e et e' deux éléments identité, alors $ee' = e = e'$, c'est-à-dire ils sont égaux.

Proposition : Si une algèbre \mathcal{A} contient une identité à gauche g et une à droite d , alors \mathcal{A} possède un élément identité.

Démonstration : $gd = g = d$.

Théorème : Toute algèbre \mathcal{A} sans identité peut être identifiée à une sous-algèbre d'une algèbre \mathcal{A}_1 possédant une identité.

Démonstration : (i) \mathcal{A}_1 peut être réalisée comme l'ensemble des paires (α, a) , $\alpha \in \mathbb{C}, a \in \mathcal{A}$.

Les opérations sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(\alpha, a) + (\beta, b) &= (\alpha + \beta, a + b) \\ \beta(\alpha, a) &= (\beta\alpha, \beta a) \\ (\alpha, a)(\beta, b) &= (\alpha\beta, \beta a + \alpha b + ab) \\ \forall a, b \in \mathcal{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} .\end{aligned}$$

(ii) \mathcal{A} est la sous-algèbre de \mathcal{A}_1 qui comprend les éléments de la forme $(0, a)$.

(iii) L'élément identité de \mathcal{A}_1 est $(1, 0)$.

Remarquons que $(1, 0)$ peut être interprété comme un nouveau vecteur de base de l'espace vectoriel de l'algèbre \mathcal{A} . On voit en plus que \mathcal{A}_1 est abélienne si et seulement si \mathcal{A} est abélienne.

Dans les applications physiques prévues, presque toutes les algèbres posséderont un élément identité. En effet, les algèbres représentent les observables d'un système et l'opérateur identité, (dans l'espace de Hilbert le projecteur identité) s'interprète dans le calcul des propositions comme la proposition tautologique affirmant que le système existe.

Du point de vue mathématique il faut remarquer que l'addition d'un élément identité peut changer la structure topologique de l'algèbre ; c'est en fait le problème analogue à celui de la compactification d'un ensemble (par exemple addition du point ∞ à \mathbb{R}).

Exemple : Soit \mathcal{X} un espace topologique localement compact. Soient $f(x)$ des fonctions continues sur \mathcal{X} , qui s'annulent à l'infini, c'est-à-dire, que $\forall \varepsilon > 0$ l'ensemble des points où $|f(x)| > \varepsilon$ est un compact contenu dans \mathcal{X} . L'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ de ces fonctions forme une algèbre.

Cette algèbre contient un élément identité si et seulement si \mathcal{X} est un compact.

Exemple : Soit \mathcal{h} un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(\mathcal{h})$ l'algèbre de tous les opérateurs bornés sur \mathcal{h} . Comme cas particulier, pour \mathcal{h} de dimension finie n , $\mathcal{L}(\mathcal{h})$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{C})$.

Exemple : Soit \mathcal{D} (resp. \mathcal{I}) l'espace des fonctions test de Schwartz sur \mathbb{R}^1 .

L'ensemble des opérateurs sur \mathcal{D} de la forme

$$D^n = p_1(x) \frac{d^{j_1}}{dx^{j_1}} p_2(x) \frac{d^{j_2}}{dx^{j_2}} \dots p_n(x) \frac{d^{j_n}}{dx^{j_n}},$$

$p_i(x)$ étant des polynômes réels, forme une algèbre, ($n < \infty$), dont $D^0 = 1$ est l'élément identité.

Définitions: Un sous-ensemble \mathcal{J} d'une algèbre \mathcal{A} est appelé idéal à gauche [resp. à droite] si

- (i) \mathcal{J} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{A}
 - (ii) $x \in \mathcal{J}$ et $a \in \mathcal{A}$ implique que $ax \in \mathcal{J}$ [resp. $xa \in \mathcal{J}$].
- On écrit $\mathcal{A}\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$ [resp. $\mathcal{J}\mathcal{A} \subset \mathcal{J}$].

Si \mathcal{J} est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on l'appelle idéal bilatère.

Remarque : Chaque algèbre \mathcal{A} contient les idéaux \mathcal{A} et $\{0\}$. Tout idéal est une sous-algèbre. Tout idéal différent de \mathcal{A} est dit propre.

Un idéal propre \mathcal{J} de \mathcal{A} est dit minimal s'il est différent de $\{0\}$ et ne contient pas proprement d'idéal du même type autre que $\{0\}$. Il est appelé maximal s'il n'est pas proprement contenu dans un idéal du même type autre que \mathcal{A} .

Remarque : Un idéal propre ne peut pas contenir l'identité.

Définition : Une algèbre qui ne possède pas d'idéal bilatère propre autre que $\{0\}$ est dite simple.

Définition : Un élément $i \in \mathcal{A}$ est appelé idempotent si $ii = i$.

Exemple : Dans $M_2(\mathbb{C})$, $i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est idempotent.

Exemple : Dans $M_2(\mathbb{C})$,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{J}_g \text{ est un idéal à gauche,}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{J}_d \text{ est un idéal à droite.}$$

On remarque que \mathcal{J}_g est engendré par $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $ii = i$, \mathcal{J}_g étant $M_2(\mathbb{C}) \cdot i$.

Dans toute algèbre \mathcal{A} , chaque élément engendre un idéal à gauche, un idéal à droite et un idéal bilatère. Car,

$$\mathcal{A}\mathcal{A}x \subset \mathcal{A}x, x\mathcal{A}\mathcal{A} \subset x\mathcal{A}, \mathcal{A}\mathcal{A}x\mathcal{A} \subset \mathcal{A}x\mathcal{A}, \mathcal{A}x\mathcal{A}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}x\mathcal{A}, x \text{ fixe } \in \mathcal{A}$$

Exemple : Dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ les opérateurs compacts forment un idéal bilatère.

Exemple : Dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ l'ensemble des opérateurs $\mathcal{J}_{d,p} = p \cdot \mathcal{L}(\mathcal{E})$ où p est un projecteur, est un idéal à droite. $\mathcal{J}_{d,p}$ est minimal si et seulement si p est unidimensionnel, maximal, si p est de la forme $1 - p'$, où p' est unidimensionnel.

Exemple : Dans $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, l'ensemble des fonctions à support compact est un idéal bilatère.

Définition : Soit \mathcal{G} un sous-ensemble (pas nécessairement une sous-algèbre) d'une algèbre \mathcal{A} . L'annihilateur droit (resp. gauche) $\mathcal{I}(\mathcal{G})$ (resp. $\mathcal{J}(\mathcal{G})$) est l'ensemble de tous les éléments d (resp. g) de \mathcal{A} tels que $sd = 0$ (resp. $gs = 0$) pour tout $s \in \mathcal{G}$.

Remarque : $\mathcal{I}(\mathcal{G})$ (resp. $\mathcal{J}(\mathcal{G})$) est un idéal à droite (resp. à gauche). Car pour tout $a \in \mathcal{A}$,

$$s(da) = (sd)a = 0 \quad \forall s \in \mathcal{G}$$

c'est-à-dire $da \in \mathcal{I}(\mathcal{G})$.

L'annihilateur gauche d'un idéal à gauche est un idéal bilatère.

Il reste à démontrer que c'est un idéal à droite. Soient $j \in \mathcal{J}_g$, $a \in \mathcal{A}$, $g \in \mathcal{J}(\mathcal{J}_g)$, alors $(ga)j = g(aj) = gj' = 0$ car $j' \in \mathcal{J}_g$ alors $ga \in (\mathcal{J}_g)$.

Exemple : Si en plus, $\mathcal{J}_g = \mathcal{A}i$ est engendré par un idempotent i on a que $\mathcal{I}(\mathcal{A}i) = (e-i)\mathcal{A}$. Car,

$$\frac{\mathcal{A}i}{\mathcal{J}_g} \cdot \frac{(e-i)\mathcal{A}}{\mathcal{I}(\mathcal{J}_g)} = \mathcal{A}(i-ii)\mathcal{A} = 0$$

Théorème : Deux des propriétés suivantes impliquent la troisième

- (i) \mathcal{A} possède un élément identité.
- (ii) L'annihilateur droit de tout sous-ensemble de \mathcal{A} est engendré par un idempotent de l'algèbre.
- (iii) L'annihilateur gauche de tout sous-ensemble de \mathcal{A} est engendré par un idempotent de l'algèbre.

Avant de démontrer le théorème nous remarquons que pour tout $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}(\mathcal{I}(\mathcal{G}))$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{I}(\mathcal{Q}(\mathcal{G}))$, car, par définition $\mathcal{G} \cdot \mathcal{I}(\mathcal{G}) = 0$ c'est-à-dire \mathcal{G} fait partie de $\mathcal{G}(\mathcal{I}(\mathcal{G}))$. De plus si \mathcal{I} annule \mathcal{G}_1 , il est clair qu'il annule tout $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$ c'est-à-dire :

$$\underline{\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1 \text{ implique } \mathcal{I}(\mathcal{G}_2) \supset \mathcal{I}(\mathcal{G}_1)}$$

De ces relations il suit que

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{I}(\mathcal{Q}(\mathcal{G})) \text{ implique que } \mathcal{Q}(\mathcal{G}) \supset \mathcal{Q}(\mathcal{I}(\mathcal{Q}(\mathcal{G})))$$

et
$$\mathcal{Q}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}' \subset \mathcal{Q}(\mathcal{I}(\mathcal{G}')) = \mathcal{Q}(\mathcal{I}(\mathcal{Q}(\mathcal{G})))$$

d'où
$$\underline{\mathcal{Q}(\mathcal{G}) = \mathcal{Q}(\mathcal{I}(\mathcal{Q}(\mathcal{G})))}$$

Nous pouvons maintenant vérifier que (i) + (ii) implique (iii) : Par hypothèse $\mathcal{I}(\mathcal{Q}(\mathcal{G})) = 1\mathcal{A}$; et il suit que

$$\mathcal{Q}(\mathcal{G}) = \mathcal{Q}(\mathcal{I}(\mathcal{Q}(\mathcal{G}))) = \mathcal{Q}(1\mathcal{A}).$$

Mais $\mathcal{Q}(1\mathcal{A}) = \mathcal{A}(e-1)$, car $\forall a \in \mathcal{Q}(1\mathcal{A}), a1\mathcal{A} = 0$, c'est-à-dire $a1 = 0$, puisque \mathcal{A} contient un élément identité. ($a1e = a1 = 0 \implies a(e-1) = a \implies a \in \mathcal{A}(e-1)$. $e-1$ est un idempotent).

On montre d'une façon analogue que (i) + (iii) implique (ii). Il reste à démontrer que (ii) + (iii) implique (i). Prenons $\mathcal{G} = \{0\}$, il est clair que

$$\mathcal{I}(0) = 1'\mathcal{A} = \mathcal{A}, \mathcal{Q}(0) = \mathcal{A}1'' = \mathcal{A}$$

Cela signifie que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\exists a'$ et a'' tels que $1'a' = a''1'' = a$. Multipliant par la gauche par $1'$ et à droite par $1''$, il vient $1'a' = 1'a = a''1'' = a1'' = a$,

donc i' est une identité à gauche et i'' une identité à droite ; par conséquent $i' = i''$ est l'élément identité.

Définition : Une algèbre satisfaisant aux conditions du théorème précédent s'appelle une algèbre de Baer .

Définition : Soit \mathcal{A} une algèbre sur \mathbb{C} . Une involution dans \mathcal{A} est une application de \mathcal{A} sur elle-même : $a \mapsto a^*$ telle que

$$\begin{aligned} (i) \quad & (a^*)^* = a \\ (ii) \quad & (a+b)^* = a^*+b^* \\ (iii) \quad & (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^* \quad \text{où } \bar{\lambda} \text{ est le complexe conjugué de } \lambda . \\ (iv) \quad & (ab)^* = b^* a^* \end{aligned}$$

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{C} .$$

Une algèbre, muni d'une telle opération est appelée algèbre involutive ou * - algèbre . Neumark[&] l'appelle algèbre symétrique. a^* s'appelle l'adjoint de a . a est appelé auto-adjoint si $a^* = a$, normal si $aa^* = a^*a$. Un sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ est dit auto-adjoint si $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$, $\mathcal{S}^* = \{ a^* \mid a \in \mathcal{S} \}$.

Chaque idéal auto-adjoint est un idéal bilatère.

Définition : Une application $\beta : \mathcal{A}_1 \xrightarrow{\text{dans}} \mathcal{A}_2$ est appelée un homomorphisme ^{&&} si

$$\begin{aligned} (i) \quad & \beta(\lambda a) = \lambda \beta(a) \\ (ii) \quad & \beta(a+b) = \beta(a)+\beta(b) \\ (iii) \quad & \beta(a \cdot b) = \beta(a) \cdot \beta(b) \end{aligned}$$

C'est un * - homomorphisme si \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont des * - algèbres et si

$$(iv) \quad \beta(a^*) = \beta(a)^* .$$

L'image inverse de l'élément o de l'algèbre \mathcal{A}_2 est appelé le noyau de l'homomorphisme β . Le noyau \mathcal{J}_β de l'homomorphisme est un idéal bilatère : Si $\beta(a) = \beta(b) = o$ alors aussi $\beta(\lambda a) = \beta(a+b) = o$ et de même $\beta(ac)$ et $\beta(ca) = o$, $\forall c \in \mathcal{A}_1$.

& M.A. Neumark, Normierte Algebren, VEB 1959

&& plus exactement, un algèbre-homomorphisme

On donne les noms suivants aux homomorphismes plus spéciaux : Si le noyau est 0, on dit que l'application est fidèle .

Un homomorphisme fidèle de $\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\text{sur}} \mathcal{A}_2$ est appelé isomorphisme

Un homomorphisme de $\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\text{dans}} \mathcal{A}_1$ est appelé endomorphisme

Un homomorphisme fidèle de $\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\text{sur}} \mathcal{A}_1$ est appelé automorphisme

Une représentation d'une algèbre est un homomorphisme de l'algèbre dans l'algèbre des opérateurs linéaires sur un certain espace vectoriel.

Dans ce cours on ne considérera que des * - homomorphismes et des * - représentations.

Exemple : Chaque algèbre peut être considérée comme une représentation d'elle-même. On prend comme espace vectoriel, sur lequel on représente \mathcal{A} , l'algèbre elle-même. A chaque élément $a \in \mathcal{A}$ on fait correspondre l'application A de l'espace vectoriel, en définissant $Ax = ax$. On vérifie aisément que les A forment une représentation qui est en plus fidèle, si \mathcal{A} possède un élément identité. On appelle la représentation représentation régulière à gauche .

Définition : Une fonction $\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \longmapsto \|a\|$, $a \in \mathcal{A}$ est appelée une pré-norme sur \mathcal{A} si

- (i) $\|a\| \geq 0$
- (ii) $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$
- (iii) $\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$,
- (iv) $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$
- (v) Si \mathcal{A} possède un élément identité e , $\|e\| = 1$.

Cette fonction est appelée une norme si (i) est remplacé par

$$(i') \quad \|a\| \geq 0, \quad \|a\| = 0 \iff a = 0.$$

Une algèbre sur laquelle une norme est définie est appelée une algèbre normée .

Définition : Une algèbre normée qui est fermée[&] par rapport à sa norme (c'est-à-dire qui est un espace de Banach) est appelée algèbre de Banach .

Si \mathcal{A} est une $*$ - algèbre normée, la condition $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ implique que $\|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\|$. Si nous imposons $\|a^*a\| = \|a\|^2$, nous obtenons $\|a\| = \|a^*\|$. Une algèbre satisfaisant $\|a\| = \|a^*\|$ mais pas nécessairement $\|a^*a\| = \|a\|^2$, $\forall a \in \mathcal{A}$ est appelée algèbre normée symétrique par Neumark.

Une algèbre de Banach satisfaisant $\|a^*a\| = \|a\|^2$ est appelée B* - algèbre .

On verra plus loin qu'une algèbre B* peut toujours être représentée fidèlement comme une sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (= l'algèbre de tous les opérateurs bornés définis sur un certain espace de Hilbert \mathcal{H}). Une telle représentation est appelée C* - algèbre .

Remarque : Beaucoup d'auteurs ne font pas de distinction entre algèbres B* et C* et réfèrent à ce que nous appelons une algèbre B* comme à une algèbre C* abstraite. Neumark appelle les algèbres B* des algèbres complètement régulières. Nous ferons la distinction entre B* et C* - algèbres dans cette introduction mathématique, mais nous l'omettrons en général pour les applications physiques selon l'usage établi. A la fin de ce paragraphe, nous discutons quelques propriétés des algèbres B*.

Proposition : Soit \mathcal{A} une algèbre normée. La limite

$$\nu(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$$

existe $\forall a \in \mathcal{A}$, de plus

- (i) $\nu(a) = \inf_n \|a^n\|^{1/n}$
- (ii) $0 \leq \nu(a) \leq \|a\|$
- (iii) $\nu(\alpha a) = |\alpha| \cdot \nu(a)$
- (iv) $\nu(ab) = \nu(ba)$, $\nu(a^k) = \nu(a)^k$ $k = 1, 2, \dots$
- (v) si $ab = ba$ alors $\nu(ab) \leq \nu(a) \cdot \nu(b)$
et $\nu(a+b) \leq \nu(a) + \nu(b)$.

Par conséquent, si \mathcal{A} est une algèbre abélienne, ν est une prénorme.

& c'est-à-dire que si pour une suite $\{a_n\}$, $a_n \in \mathcal{A}$, $\|a_n - a_m\|$ tend vers zéro pour $m, n \rightarrow \infty$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\|a_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Démonstration : (ii), (iii), (iv) et la première partie de (v) sont élémentaires.
 Pour (v) c.f. Rickart p. 10. Nous démontrons encore (i) : Soit $\nu = \inf_m \|a^m\|^{1/m}$; pour tout $\varepsilon > 0$ choisissons m tel que $\|a^m\|^{1/m} \leq \nu + \varepsilon$; alors, pour un n arbitraire, écrivons $n = pm+q$ où $0 \leq q \leq m-1$, $p, q \in \mathbb{Z}$, alors

$$\|a^n\|^{1/n} \leq \|a^m\|^{p/n} \cdot \|a^q\|^{1/n} \leq (\nu + \varepsilon)^{pm/n} \|a\|^{q/n}$$

mais $pm/n \rightarrow 1$ et $q/n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$; par conséquent

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \nu + \varepsilon$$

Comme cette limite existe $\forall \varepsilon > 0$ et $\nu \leq \|a^n\|^{1/n} \forall n$ l'existence de la limite suit.

Corollaire : Si \mathcal{A} est une algèbre B^* et $a = a^*$, alors $\nu(a) = \|a\|$.

Démonstration : Par définition d'une algèbre B^* , $\|a^*a\| = \|a\|^2$

donc
$$\|a^2\| = \|a\|^2 \quad \|a^{2k}\| = \|a\|^{2k}$$

et donc
$$\nu(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|a^{2k}\|^{1/2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|a\| = \|a\| .$$

Remarque : Cette condition est nécessaire.

Exemple : $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\|a\| = 1$ mais $a^2 = (0)$, donc $\nu(a) = 0$

Définition : Un élément $a \in \mathcal{A}$ est appelé topologiquement nilpotent, si $\nu(a) = 0$.

Définition : Le radical R d'une algèbre avec identité est l'intersection de tous les idéaux maximaux gauches.

Proposition : Le radical est aussi l'intersection des idéaux maximaux droits.

Proposition : Le radical d'une algèbre normée ne comprend que des éléments topologiquement nilpotents.

Démonstration : c.f. Rickart, théorème 2.3.4, 2.3.5.

Définition : Une algèbre dont le radical consiste seulement de l'élément 0 est dite semi-simple .

Proposition : Les algèbres B^* sont semi-simples.

Démonstration : Supposons $a \in R$. Alors aussi $a^*a \in R$, puisque R est un idéal bilatère, et $\nu(a^*a) = 0$ puisque R ne comprend que des éléments topologiquement nilpotents, mais $\|a^*a\| = \nu(a^*a)$ puisque l'algèbre est B^* , donc $\|a\| = 0$, $a = 0$.

La raison physique pour laquelle on choisit des algèbres B^* pour représenter les observables d'un système physique, est, outre la question de simplicité et de richesse de la structure, le fait que nous ne voulons pas de radical non trivial. En effet, on peut montrer que toutes les fonctionnelles linéaires continues sur une algèbre de Banach s'annulent sur le radical, par conséquent les observables représentées par des opérateurs appartenant au radical auraient des espérances mathématiques nulles pour tous les états physiques, ce qui est inadmissible.

2. Algèbres de von Neumann

Nous introduisons ici une classe particulière d'algèbres C^* qui jouissent de propriétés remarquables et apparaissent souvent dans les applications physiques. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe (pas nécessairement séparable) et soit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés sur \mathcal{H} .

Clairement $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une algèbre B^* . Soit \mathcal{M} un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Nous dénoterons par \mathcal{M}' l'ensemble de tous les éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui commutent avec tous les éléments de \mathcal{M} . \mathcal{M}' s'appelle le commutant de \mathcal{M} . On voit facilement que \mathcal{M}' est une algèbre, et que cette algèbre comprend toujours les multiples de l'identité. De la même façon on définit $\mathcal{M}'' = (\mathcal{M}')'$ le bicommutant, et il est clair que $\mathcal{M}'' \supset \mathcal{M}$. De plus, si $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, alors $\mathcal{M}_1' \supset \mathcal{M}_2'$, d'où on déduit que

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''' = \mathcal{M}^{(5)} = \dots$$

et

$$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}^{(4)} = \mathcal{M}^{(6)} = \dots$$

Si $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$, \mathcal{M}' est une $*$ -algèbre.

Définition : Une algèbre de von Neumann \mathcal{A} sur \mathcal{H} est une $*$ -sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

Exemple : Le commutant \mathcal{M}' d'un sous-ensemble $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est toujours une algèbre de von Neumann.

Remarques : Les algèbres de von Neumann sont aussi souvent appelées anneaux d'opérateurs, ou W^* -algèbres. Sakai définit les W^* -algèbres comme une algèbre B^* étant le dual d'un certain espace de Banach. Il montre ensuite que ces algèbres ont une représentation fidèle sur un certain espace de Hilbert comme algèbre de von Neumann. Dans ce cours, le terme " W^* -algèbre" sera utilisé pour une algèbre qui est isomorphe à une algèbre de von Neumann, et lorsque nous parlerons d'une algèbre de von Neumann particulière, il sera toujours entendu qu'elle fait partie d'une certaine algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ donnée.

Exemple : Toute C^* -algèbre sur un espace vectoriel de dimension finie est une algèbre de von Neumann.

Remarque : Toute algèbre de von Neumann est aussi une algèbre de Baer. Comme c'est aussi une algèbre C^* , c'est donc aussi une algèbre AW^* .

Proposition : Tout intersection d'un nombre arbitraire d'algèbres de von Neumann est une algèbre de von Neumann.

Démonstration : Soit $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Dire que $x \in \mathcal{A}$ équivaut à dire que x permute aux \mathcal{A}_i , donc à $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$, donc à $(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i)'$, c'est-à-dire à l'algèbre de von Neumann engendrée par les \mathcal{A}_i .

Corollaire : Le centre d'une algèbre de von Neumann \mathcal{A} est $\mathcal{Z} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ et est par conséquent une algèbre de von Neumann abélienne.

Définition : Une algèbre de von Neumann, dont le centre ne comprend que les multiples de l'identité est appelée un facteur.

Cette définition sera importante dans la suite. Nous verrons, entre autres, qu'il est possible d'introduire une classification partielle assez simple de ce type d'algèbre.

Exemple : $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un facteur, en effet $\mathcal{L}(\mathcal{H})' = \mathbb{C} \cdot I$

Si \mathcal{A} est abélienne, évidemment $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. \mathcal{A} est appelée maximale abélienne si $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Définition : Soit \mathcal{A} une $*$ -sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Un vecteur $x \in \mathcal{H}$ est dit cyclique ou totalisateur par rapport à \mathcal{A} si $\{ax \mid a \in \mathcal{A}\}$ est dense dans \mathcal{H} . x est dit séparateur, si la condition $a \in \mathcal{A}, ax = 0$ implique $a = 0$.

Proposition : Soit \mathcal{G} un sous-ensemble de \mathcal{H} , \mathcal{A} une $*$ -sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soit p le projecteur sur la fermeture de l'ensemble $\mathcal{A}\mathcal{G} = \{ax \mid a \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{G}\}$. Alors $p \in \mathcal{A}'$ et est le plus petit projecteur de \mathcal{A}' contenant tout l'ensemble \mathcal{G} .

Démonstration : Il est clair que pour tout $t \in \mathcal{A}$, $t\mathcal{A}\mathcal{G} \subset \mathcal{A}\mathcal{G}$, par conséquent $tp\mathcal{H} \subset p\mathcal{H}$ (t étant borné par continuité), mais cette relation signifie $ptp = tp$

d'où $pt = (t^*p^*)^* = (pt^*p)^* = ptp = tp$,

c'est-à-dire $p \in \mathcal{A}'$. Soit à présent $\mathcal{A}\mathcal{G} \subset p\mathcal{H}$. Supposons $p' \in \mathcal{A}'$, $p'\mathcal{H} \supset \mathcal{A}\mathcal{G} \Rightarrow p'\mathcal{A}\mathcal{G} = \mathcal{A}p'\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{G}$ par hypothèse, alors $p'p = p$ QED.

Théorème : Soit \mathcal{A} une algèbre de von Neumann. x est cyclique par rapport à $\mathcal{A} \iff x$ est séparateur par rapport à \mathcal{A}' , (et vice-versa).

Démonstration : " \longleftarrow " : Soit p le projecteur sur la fermeture de $\mathcal{A}x$. Selon la proposition précédente on a que $p \in \mathcal{A}'$. Puisque \mathcal{A}' contient 1, $(1-p)x = 0$. Mais, par hypothèse x est séparateur à \mathcal{A}' , alors $1-p = 0$, $p = 1$, c'est-à-dire $p\mathcal{H} = \mathcal{H}$. Alors la fermeture de $\mathcal{A}x$ est \mathcal{H} , ce qui montre que x est cyclique par rapport à \mathcal{A} .

" \implies " : Les conditions $a' \in \mathcal{A}'$, $a'x = 0$ impliquent que $a'ax = aa'x = 0$, mais cela signifie que $a' = 0$, parce que $\mathcal{A}x$ est dense par hypothèse ; donc x est séparateur par rapport à \mathcal{A}' .

Théorème : Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre. Tout élément $a \in \mathcal{A}$ est combinaison linéaire de deux éléments auto-adjoints ou de quatre éléments unitaires.

Construction de ces éléments :

$$\underline{\text{Autoadjoint}} : a_1 = \frac{1}{2} (a+a^*), a_2 = -\frac{i}{2} (a-a^*); a = a_1 + ia_2$$

$$\underline{\text{Unitaire}} : a \text{ étant borné } \exists \lambda_1, \lambda_2 \text{ tels que } a_i = \lambda_i a_i' \\ \text{avec } \|a_i'\| < 1 (i = 1, 2); u_i = a_i' + i(1-a_i'^2)^{\frac{1}{2}} \text{ est unitaire.}$$

La racine peut être approximée par la série de Taylor, qui converge absolument car $\|a_i'\| < 1$. $u_i u_i^* = u_i^* u_i = 1$, parce que $a_i^* = a_i$.

$$a = \frac{1}{4} \{ \lambda_1 (u_1 + u_1^*) + i \lambda_2 (u_2 + u_2^*) \}.$$

Définition : Un opérateur t est dit fermé, si la convergence de $\{tx_i\} \rightarrow y$ et de $x_i \rightarrow x$ implique $tx = y$

Théorème : Pour un t fermé, on peut écrire $t = wk$ où w est partiellement isométrique et k est auto-adjoint. Cette décomposition est appelée la décomposition polaire ; elle est unique.

Définition : Un opérateur fermé t est dit affilié à une algèbre de von Neumann \mathcal{A} (on écrit $t \eta \mathcal{A}$), si t commute avec tous les opérateurs de \mathcal{A}' , i.e. si $\forall b' \in \mathcal{A}', b't = tb'$.