Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A Dold Heidelberg and B Eckmann Zurich

307

J. L. Bretagnolle
S. D. Chatterji
P.-A. Meyer

Ecole d'Été de Probabilités: Processus Stochastiques

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1973

AMS Subject Classifications (1970): 13-02, 14-02, 14A05, 14A10

ISBN 3-540-06137-1 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-06137-1 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1973. Library of Congress Catalog Card Number 72-96863. Printed in Germany.

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

INTRODUCTION

Les textes qu'on trouvera dans ce recueil constituent les cours donnés à l'Ecole d'Eté de Calcul des Probabilités de Saint Flour du 5 au 23 Juillet 1971, à l'exception du cours de Monsieur DELLACHERIE dont on trouvera l'essentiel dans l'ouvrage "Théorie générale des processus" chez Springer Verlag

Cette école d'été a été un lieu de rencontre et d'échanges fructueux pour une trentaine de chercheurs français et étrangers.

Nous remercions Messieurs BRETAGNOLLE, CHATTERJI et MEYER du temps qu'ils ont consacré après l'école à la mise au point définitive du manuscrit ainsi que tous ceux qui ont participé à son édition.

A. BADRIKIAN   P.L. HENNEQUIN

TABLE DES MATIERES

PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

par J.L. BRETAGNOLLE

I - Introduction

Le texte qui suit ne représente qu'une partie du cours que j'ai fait à l'Ecole d'Eté. Un troisième chapitre que je n'ai pas rédigé comportait l'étude fine des trajectoires, où j'ai présenté les très beaux résultats de Kesten ; pour exposer ces derniers j'ai suivi de très près la rédaction que j'en ai faite pour le Séminaire de Strasbourg, 70/71, Lecture Notes, Springer Verlag. Je n'ai pas eu le temps d'aborder les questions de dimension de Hausdorff ou de mesure de Hausdorff des trajectoires. J'ai choisi de ne pas parler du Mouvement Brownien. Je suppose connues les notions de martingales et de temps d'arrêt telles qu'on les trouve par exemple dans le livre de Neveu.

Pour le chapitre I, j'ai suivi un exposé de Marie DUFLO. Pour le chapitre II, j'ai suivi un article de P.W. MILLAR : "Path behavior of processes with stationnary independents increments", Z. Wahr 17, 53-73 (1971). Enfin, au moment où je reprends ces notes, j'ai connaissance d'un article (à paraître dans Z. Wahr) de FRISTEDT et GREENWOOD qui contient des résultats extrêmement intéressants et généraux sur les sommes variationnelles, auquel je renvoie par avance les lecteurs intéressés par cette question. Je signale également mon exposé au Séminaire de Strasbourg 71/72 sur la p-variation forte en connexion avec ce problème.

CHAPITRE I : LA DECOMPOSITION DE PAUL LEVY

Définition 1

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, espace de probabilité muni d'une famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t$, où $t \in \mathbb{R}^+$. Une famille X_t de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est un P.A. I n-dimensionnel si :

a) X_t est adapté à $\mathcal{F}_t$ pour tout t (cela signifie X_t $\mathcal{F}_t$-mesurable)

b) $X_0 = 0$ p.s.

c) $X_{t+s} - X_t$, indépendant de $\mathcal{F}_t$, est de même loi que X_s, pour s, t positifs

d) X_t est continu en probabilité.

Conséquences

Posons $\varphi_t(u) = E\{\exp i(u \mid X_t)\}$ où $(u \mid v)$ représente le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. D'après d), les $\varphi_t(u)$ sont continues du couple(t, u); d'après b), $\varphi_0(u) = 1$, et comme d'après c) $\varphi_{t+s}(u) = \varphi_t(u)\ \varphi_s(u)$, $\varphi_t(u) \neq 0$ pour tout couple t, u. On peut donc écrire $\varphi_t(u) = \exp(-t\,\psi(u))$, où ψ est une fonction continue nulle en 0.

Réciproquement, si on a une fonction $\psi(u)$, continue, nulle en 0, telle que pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi_t(u) = e^{-t\psi(u)}$ soit de type positif [ce qui signifie que pour tout choix fini des u_j, λ_j, $\sum_{i,j} \lambda_i \overline{\lambda_j}\ \varphi_t(u_i - u_j) \geqslant 0$] d'après le théorème de Bochner $\varphi_t(u)$ est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. On peut donc construire un système projectif de mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}^+}$ par la formule

$$E\left\{\exp\left[i\ (u_1 \mid X_{t_1}) + (u_2 \mid X_{t_2}) + \dots + (u_n \mid X_{t_n})\right]\right\}$$

$$= E\left\{\exp i\left[(u_1 + u_2 + \dots + u_n \mid X_{t_1}) + \dots + (u_n \mid X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\right]\right\}$$

$$= \varphi_{t_1}(u_1 + \dots + u_n) \cdot \varphi_{t_2 - t_1}(u_2 + \dots + u_n) \cdots \varphi_{t_n - t_{n-1}}(u_n), \text{ pour tout}$$

choix fini des $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_n$. Le processus X_t sur $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}^+}$, défini d'après le théorème de Kolmogorov, manifestement adapté à la tribu

$\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s \mid s \leqslant t\}$, possèdera les propriétés a, b, c, d également puisque $X_{t+s} - X_t \xrightarrow{Pr} 0$ quand $s \to 0^+$ est une conséquence immédiate de $\varphi_s(u) \to 1$ quand $s \to 0^+$. Donc, à toute possédant les propriétés, correspond un P.A. I

Théorème 1

Soit S un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^+$. Il existe alors un ensemble P-négligeable N tel que sur N^c, $t \to X_t$ soit pourvue de limites à gauche et à droite le long de S (l.a.g. l.a.d.). Si on pose alors $Y_t = \lim\limits_{\substack{s \in S \\ s \downarrow t}} X_s$ sur N^c, 0 sur N, Y_t est adapté à $\overline{\mathcal{F}_t}$ (*), et Y_t est continu à droite, pourvu de limites à gauche (c.a.d. l.a.g). Enfin Y_t est une modification de X_t, c'est-à-dire que pour tout t, $P[Y_t \neq X_t] = 0$.

(*) $\overline{\mathcal{F}_t}$ est la complétée de $\mathcal{F}_t$ dans $\mathcal{F}$, c'est-à-dire complétée par tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$ (ou de $\bigvee\limits_t \mathcal{F}_t$).

Démonstration

Soit $u \in \mathbb{Q}^n$, et M_t^u définie par $t \to \dfrac{e^{i(u|X_t)}}{\varphi_t(u)}$. Pour chaque u, M_t^u est une martingale (complexe) adaptée à $\mathcal{F}_t$, donc, sauf sur un négligeable N^u, l.a.g. l.a.d. le long de S (voir par exemple Neveu, pages 129 à 132). Les limites à gauche et à droite le long de S existent donc simultanément pour toutes les M^u, sauf sur l'ensemble (négligeable) $N = \bigcup\limits_{u \in \mathbb{Q}^n} N^u$. Supposons que, pour $\omega \in N^c$, $s \to X_s$ ait deux valeurs d'adhérence a et b distinctes quand s tend (↑ ou ↓) vers un t ; on peut toujours trouver un u de $\mathbb{Q}^n$ tel que $(u \mid b-a) \notin 2\, i\, \Pi\, \mathbb{Z}$, c'est donc impossible ; X_t est donc l.a.g. l.a.d. le long de S sur N^c, et Y_t c.a.d. l.a.g. Par convergence dominée, on a $E\{\exp i\,(u \mid Y_t - X_t)\} = \lim\limits_{s \downarrow t} E\{\exp i\,(u \mid X_s - X_t)\} = 1$, puisque X_t est continu en probabilité, donc $P\{Y_t \neq X_t\} = 0$. Enfin, puisque $X_t = Y_t$ p.s., Y_t est adapté à $\overline{\mathcal{F}_t}$.

Conséquence

On avait un P.A. I au sens de la définition I, on prend maintenant pour X_t la version régularisée (c.a.d. l.a.g.) Y_t , et pour $\mathcal{F}_t$, $\overline{\sigma\,(X_s \quad | s \leq t)}$. Mais attention maintenant on étudie un P.A. I fixé X_t (s'il en existe), et $\mathcal{F}_t$ est maintenant fixée pour tout le chapitre.

Théorème 2 (loi 0-1)

$\mathcal{F}_{t^+}$, définie comme $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, est égale à $\mathcal{F}_t$

Démonstration

$\mathcal{F}_{t^+}$ peut être considérée comme une intersection dénombrable, les tribus étant emboitées. Alors

si $t_1 \leqq t_2$, $E\,\{\exp i\,(u|X_{t_1})\ |\ \mathcal{F}_{t_2}\} = E\,\{\exp i\,(u|X_{t_1})\ |\ \mathcal{F}_{t_2^+}\}$, une version commune en étant $\exp i\,(u\ |\ X_{t_1})$.

si $t_1 > t_2$, $E\,\{\exp i\,(u|X_{t_1})\ |\ \mathcal{F}_{t_2}+\} \overset{p.s}{=} \lim\limits_{s \downarrow t_2} E\,\{\exp i\,(u|X_{t_1})|\ \mathcal{F}_s\}$

$\overset{p.s}{=} \lim\limits_{s \downarrow t_2} \exp i\,(u|X_s)\,\varphi_{t_1-s}(u) \overset{p.s}{=} \exp i\,(u|X_{t_2})\,\varphi_{t_1-t_2}(u) \overset{p.s}{=}$

$\{\exp i\,(u|X_{t_1})\ |\ \mathcal{F}_{t_2}\}$ (on a utilisé la c.v.p.s. des espérances conditionnelles, c'est encore le théorème de convergence des martingales). Donc, pour tout u, tout s, $E\,\{\exp i\,(u|X_s)\ |\ \mathcal{F}_{t^+}\} \overset{p.s}{=} E\,\{\exp i\,(u|X_s)\ |\ \mathcal{F}_t\}$. Les deux espérances conditionnelles sont égales p.s. sur toute v.a. $\exp i\,(u|X_s)$, donc sur toute v.a. de $\bigvee_t \mathcal{F}_t$, donc les σ-algèbres sont égales (elles sont complètes). Désormais donc, $\mathcal{F}_t$ est continue à droite : $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ (en particulier $A \in \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0^+} \longrightarrow P\,(A) = 0$ ou 1).

Théorème 3 (Propriété de Markov forte)

Soit T un temps d'arrêt ; alors sur $\{T < \infty\}$, $\{X_{t+T} - X_T \mid t \geqslant 0\}$ est un P.A. I de même loi que X_t , adapté à $\mathcal{F}_{T+t}$, c.a.d. l.a. g et indépendant de $\mathcal{F}_T$.

Démonstration

Supposons tout d'abord T borné, $A \in \mathcal{F}_T$; soient des u_j de $\mathbb{Q}^n$, des t_j de $\mathbb{R}^+$; alors

$$E\left\{1_A . \exp\ i\left[\sum_j (u_j | X_{T+t_j} - X_{T+t_{j-1}})\right]\right\} = P(A) \prod_j \varphi_{t_j - t_{j-1}} (u_j)$$

on applique le théorème d'arrêt aux martingales $M_t^{u_j}$. Si T est non borné, la formule est vraie appliquée à $T\wedge n$ et $A \cap \{T \leqslant n\}$, qui appartient à $\mathcal{F}_{T\wedge n}$. On peut passer à la limite par convergence dominée, la formule est donc vraie sans restrictions. Elle montre : d'une part l'indépendance du processus $X_{t+T} - X_T$ de $\mathcal{F}_T$, d'autre part que $X_{t+T} - X_t$ a les propriétés a) b) c). Il est évidemment c.a.d. l.a. g ! donc à fortiori continu en probabilité.

Corollaire

Un P.A. I dont p.s l'amplitude des discontinuités est bornée a des moments de tous ordres.

Démonstration

Soit M tel que P $\{\exists t \text{ avec } |X_t - X_{t^-}| \geqslant M\} = 0$ (l'intérieur de l'accolade est bien un évènement pour un processus dont toutes les trajectoires sont c.a.d. l.a.g). Posons $T_1 = \text{Inf}\ (t \mid |X_t| \geqslant M)$, et $T_n = \text{Inf}\ \{t \mid t>T_{n-1}\ ;\ |X_t - X_{T_{n-1}}| \geqslant M\}$. La continuité à droite entraîne que les T_n forment une suite strictement croissante p.s. de temps d'arrêt. Comme pour tout T $|X_T - X_{T^-}| \leqslant M$, par récurrence $\sup\limits_{s\leqslant T_n} |X_s| \leqslant 2\,n\,M$, Markov fort entraîne que les $T_n - T_{n-1}$ sont indépendants de $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$, de même loi que T_1, donc que $E\,\{e^{-T_n}\} = (E\,\{e^{-T_1}\})^n = a^n$ avec $a < 1$. Alors $P\,\{|X_t| > 2\,n\,M\} \leqslant P\,\{T_n < t\} \leqslant a^n$ et, d'où l'existence d'un moment exponentiel pour X_t .

§ 2 - Processus de Poisson

C'est un processus croissant adapté qui ne peut croitre que par des sauts d'amplitude + 1. On le notera (N_t) par la suite, avec ou sans indices supplémentaires.

Soit alors $T_1 = \mathrm{Inf}\ \{t \mid N_t \neq 0\}$, soit $\{T_1 > t\} = \{N_t = 0\}$.
T_1 est un temps d'arrêt, $P\ \{T_1 > t+s\} = P\ \{N_{t+s} - N_t = 0\ ;\ N_s = 0\}$, donc d'après Markov fort, $P\ \{T_1 > t+s\} = P\ \{T_1 > t\}\ \ P\ \{T_1 > s\}$; cette fonction étant décroissante bornée, $P\ \{T_1 > t\} = e^{-at}$ pour un a de $\mathbb{R}^+$ ($T_1 > 0$ p.s.).
Pour $a = 0$, $N_t \equiv 0$, sinon, T_1 est fini p.s. et si l'on pose
$T_n - T_{n-1} = \mathrm{Inf}\ \{t \mid t > 0\ ;\ N_{t+T_n} - N_{t+T_{n-1}} > 0\}$, $T_n - T_{n-1}$ indépendant de $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$, est de même loi que T_1.
Alors $P\ \{N_t = n\} = P\ \{T_{n+1} > t\ ;\ T_n \leq t\} = \dfrac{a^n\ t^n}{n!}\ e^{-at}$, soit
$E\ \{e^{i\,u\,N_t}\} = \exp - at\ (1 - e^{iu})$ - Comme cette fonction est de type positif, conformément à la réciproque page 1, il existe des processus de Poisson. Enfin (corollaire de T.3) $\widehat{N}_t = N_t - a\,t$ et $(N_t - at)^2 - at$ sont intégrables, et des martingales comme on le vérifie immédiatement.

Théorème 4

Soit M_t une martingale centrée de carré intégrable, N_t un Poisson, alors, pour tout t,

$$E\ \{M_t\ N_t\} = E\ \{\sum_{n\geq 0}\ (M_{T_n} - M_{T_n^-})\ 1_{T_n\leq t}\ \}$$

(Les T_n sont ceux de Poisson N_t);

Démonstration

Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$ une subdivision de $[0\ t]$. En usant de manière répétée de la propriété des martingales de M_t et de $\widehat{N}_t$, il vient :

$$E\ \{M_t\ N_t\} = E\ \{M_t\ \widehat{N}_t\} = E\ \{(\sum_i\ (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\ .\ \sum_j\ (\widehat{N}_{t_{j+1}} - \widehat{N}_{t_j})\}$$

$$= E\ \{\ \sum_i\ (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}).(\widehat{N}_{t_{i+1}} - \widehat{N}_{t_i})\} = E\ \{\sum_i\ (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\ (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})\}$$

Si le pas $\operatorname{Sup}_i (t_{i+1} - t_i)$ tend vers 0,

$$\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \xrightarrow{P_r \text{ ou p.s.}} \sum_{n\geq 0} (M_{T_n} - M_{T_n^-})\, 1_{T_n\leq t}$$

La démonstration est achevée si l'on montre que l'on peut appliquer le théorème de Lebesgue : or

$\left|\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})\right| \leq 2 \operatorname{Sup}_{s\leq t} |M_s| \,.\, N_t$, et les deux termes sont dans L^2 ($E \operatorname{Sup}_{s\leq t} |M_s|^2 \leq 4\ E\,|M_t|^2$)

§3 - Décomposition de Paul Lévy

3.1 - Mesure de saut

Soit B un borélien de $\mathbb{R}^n$ avec $0 \notin \overline{B}$. Définissons par récurrence les temps d'arrêt : $S_B^1 = \operatorname{Inf}\{t \mid t > 0\ ;\ X_t - X_{t^-} \in B\}$; $S_B^n = \operatorname{Inf}\{t \mid t > S_B^{n-1}\ ;\ X_t - X_{t^-} \in B\}$: on vérifie en effet facilement qu'à cause de la continuité à droite, X (t, ω) est mesurable du couple, donc que les S_B^n sont des temps d'arrêt adaptés aux $\mathcal{F}_{t^+}$, donc aux $\mathcal{F}_t$ d'après la loi (0-1); la continuité à droite entraîne que $S_B^1 > 0$ p.s. et que $N_t(B) = \sum_{n\geq 0} 1_{S_B^n\leq t} < \infty$ p.s.

(sinon, il y aurait une discontinuité de 2ème espèce sur la trajectoire X_t)
N_t (B) est donc un Poisson (voir plus loin) dont on note L (B) le paramètre $E\{N_1(B)\}$. Pour chaque ω, N_t (d.) (ω) définit une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, donc $L(d.) = E\{n_1(d.)\}$ est également une mesure (⩾ 0) σ-finie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

3.2 - Processus de sauts associés

Lemme 1

Soit f mesurable bornée de B dans $\mathbb{R}^p$ alors

$$\int_B f(x)\, N_t(dx) = \sum_n f(X_{S_B^n} - X_{S_B^n})\ 1_{S_B^n\leq t}$$

Démonstration

Si f est étagée, $f = \sum_j a_j 1_{B_j}$ avec $\sum_j 1_{B_j} = 1_B$, l'intégrale vaut

$\sum_j a_j N_t (B_j) = \sum_j a_j (\sum_n 1_{S^n_{B_j} \leq t})$. Mais la famille $\{S^n_B\}$ est la réunion des $\{S^n_{B_j}\}$, d'où le résultat pour f étagée. Sinon, on approche f uniformément par des étagées ...

Remarque

En fait, B étant un borélien ($0 \notin \overline{B}$ bien sûr) il suffit que f soit finie partout sur B pour que la formule soit vraie, car N_t (B) est p.s. fini pour tout t en particulier, on appellera X_t (B) la quantité

$$\int_B x \, N_t (dx) = \sum_n (X_{S^n_B} - X_{S^n_B -}) \, 1_{S^n_B \leq t} \, .$$

Lemme 2

$\int_B f(x) \, N_t (dx)$, $X_t(B)$ sont des P.A. I adaptés à $\mathcal{F}_t$

Démonstration

N_t (dx) est un P.A. I adapté !

Lemme 3

$X_t - X_t$ (B) est un P.A. I adapté à $\mathcal{F}_t$. [Pour démontrer que N_t (B) ou X_t (B) ou $X_t - X_t$ (B) sont des P.A. I adaptés,on remarque que les conditions a et b sont automatiquement vérifiées, ainsi que d. renforcée (c.a.d. l.a.g). Seule c. est à vérifier ; or pour chacun d'eux, soit Z_t, on remarque que $Z_{t+s} - Z_t \in \sigma \{X_u \mid t \leq u \leq t+s\}$, donc est indépendant de $\mathcal{F}_t$; de même pour la stationnarité des accroissements...

Enfin, $X_t - \int_{|x|\geq 1} N_t$ (dx) n'a pas de sauts |d'amplitude| ≥ 1, (d'après le lemme 1), est un P.A. I adapté à $\mathcal{F}_t$ (d'après le lemme 3) peut donc être centré par une translation $_\gamma t$ (d'après le corollaire 3) et on peut donc se ramener à l'étude de la :

3.3 Décomposition de Lévy des P.A. I centrés à sauts bornés par 1

Lemme 4

Soit $B \subset \{|x| \leqslant 1\}$, tel que $0 \notin \overline{B}$. Soit maintenant $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, telle que $f \cdot 1_B$ soit dans $\mathbb{L}^2 \{L\ (d.)\}$ (la mesure de sauts L (d.) a été introduite en 3.1)

On a alors

$$E \left\{\int_B f(x)\ N_t\ (dx)\right\} = t \int_B f(x)\ L\ (dx)$$

et $$E \left\{\left[\int_B f(x)\ N_t\ (dx) - t \int_B f(x)\ L\ (dx)\right]^2\right\} = t \int_B f^2(x)\ L\ (dx).$$

Remarquons que $1_B\ L\ (dx)$ est une mesure positive finie.

Démonstration

Si f est étagée, $f = \sum a_j 1_{B_j}$ on a alors

$$E \left\{ \sum_j a_j N_t\ (B_j)\right\} = \sum_j a_j E\{N_t\ (B_j)\} = t \sum_j a_j L\ (B_j)$$

Pour la seconde formule, remarquer que si $B_i \cdot B_j = \emptyset$, d'après le théorème 4 $E \{\hat{N}_t\ (B_i)\ \hat{N}_t\ (B_j)\} = 0$; Pour f non étagée, on choisit une suite de fonctions étagées f_n telles que $f_n\ 1_B$ tendent vers $f \cdot 1_B$ dans $\mathbb{L}^2$ (L (d.)) et donc aussi dans $\mathbb{L}^1$ (L (d.)) ; il y a alors convergence des intégrales stochastiques correspondantes dans $\mathbb{L}^2$ et dans $\mathbb{L}^1$ (dP).

Introduisons maintenant $\mathcal{M}$, espace des martingales centrées de carré sommable de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, adaptées à $\mathcal{F}_t$, et dont on a pris la version c.a.d. l.a.g

On munit cet espace de la topologie (de Fréchet) induite par la famille de semi-normes $q_t\ (M) = \left[E\ \{M_t^2\}\right]^{1/2}$. De l'inégalité classique $E \{\sup_{s \leqslant t} M_s^2\} \leqslant 4\ E\ \{M_t^2\}$, on déduit que la q_t-convergence d'une suite entraîne, avec probabilité 1, la convergence uniforme des trajectoires sur l'intervalle $[0\ t]$, donc la limite est c.a.d. l. a. g . La q_t convergence entraîne également la convergence des v.a. dans $\mathbb{L}^2$, donc préserve les propriétés de centrage et de martingale. Autrement dit, $\mathcal{M}$ est fermé pour sa topologie.

Lemme 5

Soit B comme plus haut et

$\mathcal{H}_B = \{\int_B f(x)\, N_t(dx) - t \int_B f(x)\, L(dx) \mid f \cdot 1_B \in \mathbb{L}^2\, (L\,(d.))\}$

$\mathcal{H}_B$ est alors un sous espace fermé de $\mathcal{M}$.

Démonstration

On a (*) $t \, \| f \cdot 1_B \|^2_{\mathbb{L}^2(L(d.))} = q_t\, (M_{f.1_B})^2$ en posant

$M_{f.1_B,t} = \int_B f(x)\, N_t(dx) - t \int_B f(x)\, L\,(dx)$.

α) pour $f \cdot 1_B$ étagée, $M_{f.1_B}$ est bien une martingale de $\mathcal{M}$, puisqu'à chaque Poisson N_t correspond sa martingale $\hat{N}_t = N_t - E\,\{N_t\}$ dans $\mathcal{M}$. Toute fonction de $\mathbb{L}^2$ (L (d.)) étant limite d étagées, $M_{f.1_B}$ est bien alors une martingale de $\mathcal{M}$ dès que $f \cdot 1_B$ est dans $\mathbb{L}^2\, \{L\,(d.)\}$

β) Maintenant $\mathcal{H}_B$ est bien fermé dans $\mathcal{M}$, puisque la q_t-convergence entraîne réciproquement la convergence de $\mathbb{L}^2\, \{\mathbb{L}\,(d.)\}$ d'après la formule (*).

Lemme 6

Soit B comme dans $\mathbb{L}$.4. Si $M \in \mathcal{M}$ est continue aux temps S_{B^n} , alors M est orthogonale à $\mathcal{H}_B$.

Démonstration

D'après le théorème 4, pour tout A dans B, (à fortiori) $E\,\{M_t\, N_t(A)\} = 0$ pour tout t. Or, les $\{N_t\,(A) \mid A \subset B\}$ engendrent $\mathcal{H}_B$.

Corollaire 6

Si B_1 et B_2 sont deux boréliens disjoints, $0 \notin \bar{B}_1$, $0 \notin \bar{B}_2$, les processus $X_t\,(B_1)$ et $X_t\,(B_2)$ sont deux P.A. I indépendants.

Démonstration

Que ce soient des P.A. I a déjà été démontré (lemme 4).

Si maintenant $M_t^u = \dfrac{\exp i\,(u \mid X_t\,(B_1))}{E\,\{\exp i\,(u \mid X_t\,(B_1))} - 1,$

$M'\,{}_t^v = \dfrac{\exp i\,(v \mid X_t\,(B_2))}{E\,\{\exp i\,(v \mid X_t\,(B_2))\}} - 1,$ ces deux martingales sont orthogonales

d'après le lemme 6, soit $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $E\,\{M_t^u \; M'\,{}_s^v\} = 0$, ce qui assure l'indépendance.

Posons maintenant $Y_t(B) = X_t(B) - E\,\{X_t(B)\} = X_t(B) - t \int_B x\, L\,(dx)$.
C'est à la fois un P.A. I et une martingale de $\mathcal{M}$.
Si l'on pose $B_k = \{ \frac{1}{k+1} < |x| \leqslant \frac{1}{k} \}$ et $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, les $Y_{(B_k)}$ sont deux à deux indépendants, et $X - Y_{(A\ n)}$ et $Y_{(A_n)}$ sont orthogonaux et même indépendants (calquer la démonstration du corollaire 6). En conséquence, la série des $Y_{(B_k)}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ et donc dans $\mathcal{M}$ vers un P.A. I X_d, pendant que $X - Y_{A_n}$ converge vers un P.A. I X_c de $\mathcal{M}$, donc :

Lemme 7

$X_t = X_c(t) + X_d(t)$ avec $X_c(t)$ martingale à trajectoires continues, où

$$X_d\,(t) = \int_{|x|\leqslant 1} x\,\left[N_t(dx) - t\,L\,(dx)\right]$$

Commentaire

Cette dernière intégrale existe dans $\mathbb{L}^2$, et donc

$$\int_{|x|\leqslant 1} |x|^2 \; L\,(dx) \;\leqslant \infty.$$

Reste à caractériser la partie continue : on va montrer que c'est nécessairement un P.A. I gaussien, c'est-à-dire que chaque $X_c\,(t)$ sera gaussienne. Il suffit pour cela de le montrer pour chaque projection unidimensionnelle (propriété bien connue des gaussiennes) autrement dit de montrer le

Lemme 8

Soit B_t un P.A. I unidimensionnel, centré, à trajectoires continues ; alors, pour un $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$,

$$E\{e^{iuB_t}\} = e^{-t\sigma^2 \frac{u^2}{2}}$$

Démonstration

En tant que P.A. I sans discontinuité, tous ses moments existent d'après le corollaire 3. Ou bien $E\,B_t^2 = 0$ pour tout $t > 0$, et le problème est réglé, ou bien on peut poser $E\,B_t^2 = t$, en multipliant le processus par une constante.

Remarquons qu'alors $E\,B_t^4 = at + bt^2 + ct^3$: il suffit de poser $E\{e^{iuB_t}\} = e^{-t\psi(u)}$, de dériver 4 fois à l'origine ($\psi(u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme $\varphi_t(u)$) et de remarquer que $\psi'(o) = 0$. Soit maintenant $P = \{0 = t_o < t_1 < \dots < t_n = t\}$ une partition de $[0\ t]$, dont le pas : $\sup_i (t_{i+1} - t_i)$ va tendre vers 0. On note Δt_i la quantité $t_{i+1} - t_i$, ΔB_i la quantité $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$. On a alors :

$$E\{e^{iuB_t} - 1\} = E\{\sum_i e^{iuB_{t_{i+1}}} - e^{iuB_{t_i}}\} =$$

$$\sum_i + iu\,E\{e^{iuB_{t_i}}\Delta B_i\} - \frac{u^2}{2}\sum_i E\{e^{iuB_{t_i}}(\Delta B_i)^2\}$$

$$-\frac{u^2}{2}\sum_i E\ \{\Delta B_i^2\,.\,(e^{iu(B_{t_i}+\theta_i\Delta B_i)} - e^{iuB_{t_i}})\}$$

où les θ_i sont des nombres compris entre 0 et 1, par la formule de Taylor à l'ordre 2. Dans le second membre ; le premier terme est nul : ΔB_i est d'espérance nulle, indépendant de B_{t_i}.

Le second terme vaut $-\frac{u^2}{2}\sum_i \varphi_{t_i}(u)\ \Delta t_i$ et tend donc, quand le pas tend vers 0, vers $-\frac{u^2}{2}\int_0^t e^{-s\psi(u)}\,ds$.

Le troisième terme tend vers 0 : soit A_α l'évènement
$A_\alpha = \{\sup_i \sup_{t_i \leq u,v \leq t_{i+1}} |B_u - B_v| < \alpha\}$.

Le troisième terme peut alors se majorer par

$$|u|^3 \int_{A_\alpha} \alpha \,(\sum \Delta \; B_i^2)\, dP + |u|^2 \int_{A_\alpha^c} (\sum \Delta \, B_i^2)\, dP \text{ , soit par}$$

$$\alpha \;\; |u|^3 \; E \;\; \{\sum \Delta \;\; B_i^2\} + |u|^2 \;\sqrt{P\;(A_\alpha^c)} \;.\; \sqrt{E \;\; \{\left[\, \sum \Delta \; B_i^2\right]^2\}} \text{ , soit,}$$

compte-tenu de l'évaluation de $E \left\{B_t^4\right\}$, par $\alpha \;|u|^3 \; t + u^2\sqrt{P(A_\alpha^c)} \;\left[O(t+t^3)\right]^{1/2}$.
Remarquons enfin que la continuité p.s. des trajectoires entraîne que quand la partition se raffine, $P\;(A_\alpha^c) \to 0$. L'espérance du 3ème terme a une lim $\leqslant \;\alpha\; |u^3|$, donc nulle. On obtient donc la formule :

$$e^{-t\psi(u)} - 1 = -\frac{u^2}{2} \int_0^t e^{-s\psi(u)} \, ds. \text{ qui identifie alors } \psi\;(u) \text{ à } \frac{u^2}{2}\;.$$

4 - Théorème de décomposition

A- Soit X_t un P.A. I n-dimensionnel, alors

$$X_t = B_t^n + t\;E\;\{X_1 - \int_{|x|>1} x\;N_t\;(dx)\} + \int_{|x|\geqslant 1} x\;N_t\;(dx)$$

$$+ \int_{|x|<1} x\;(N_t\;(dx) - t\;L\;(dx)) \text{ où}$$

- B_t^n est un processus gaussien centré, à trajectoires continues p.s.
- N_t (dx) une famille de processus de Poisson, indépendants de B_t^n, N_t (A) indépendant de N_t (B) si $A.B = \emptyset$, avec $L\;(dx) = E\;N\;(dx)$.
- L (dx) est une mesure positive sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, avec $\int (|x^2|_\wedge 1) L(dx) < \infty$
- La première intégrale stochastique a un sens dans L^0, la seconde dans $\mathbb{L}^2$.

B- Formule en loi. Dans ces conditions,

$$\psi\;(u) = -\frac{1}{t}\;\text{Log}\;E\;\{\exp\;i\;u\;X_t\} = \frac{1}{2}\,Q(u) - i\;(a|u) + \int_{|x|\geqslant 1} (1-e^{i(u|x)})L(dx)$$

$$+ \int_{|x|<1}\left[\,1 - e^{i(u|x)} + i\;(u|x)\right] L\;(dx), \text{ où}$$

Q forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, L (dx) comme dans A.

C- Réciproquement si on se donne Q, a, L comme dans B, il existe un P.A. I donc la loi est donnée par la formule B

D- Il y a unicité de la représentation B.

Démonstration

A résume l'étude précédente, (B) est évidente. (D) L'unicité de la décomposition est évidente par construction. Pour la formule en loi, soit

$$\psi(u) = Q_j(u) - i(a_j \mid u) + \int_{|x|\geq 1} (1 - e^{i(u|x)}) L_j(dx) + \int_{|x|<1} (1 - e^{i(u|x)} + i(u|x)) L_j(dx)$$

où Q_j, a_j, L_j comme dans B, $j = 1, 2$.

Soit i_θ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{\varphi\to+\infty} \frac{\psi(\varphi^{i_\theta})}{2} = \frac{1}{2} Q_j(i_\theta), \text{ car } \lim_{\varphi\to\infty} \frac{(a_j \mid \varphi i_\theta)}{2} = 0,$$ de même pour les termes intégraux, par convergence dominée. ψ détermine donc Q. On va déterminer toutes les projections de L : (Supposons le P.A. I 1. dimensionnel) par

$$\psi(u) - \frac{1}{2} Q(u) - \frac{1}{2} \int_{u-1}^{u+1} (\psi(v) - \frac{1}{2} Q(v)\, dv = \int e^{iux} (1 - \frac{\sin x}{x}) L(dx)$$

Le premier membre détermine alors (Bochner) la mesure (positive)

$(1 - \frac{\sin x}{x}) L(dx)$, donc L puisque $1 - \frac{\sin x}{x} > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a s'identifiera alors par différence.

(C) : Pour chaque t, $\exp - t\, Q(u)$, $\exp - it(a \mid u)$ et $\exp - t\,(1-e^{i(u|x)})$ sont de type positif, donc la formule B définit une fonction continue $\psi(u)$ si $\int (|x|^2 \wedge 1)\, L(dx) < \infty$, avec pour chaque t $\exp - t\,\psi(u)$ de type positif, et donc, conformément à la remarque du premier paragraphe, un P.A. I

Remarque

On a démontré, sans jamais étudier ce processus, que la version c.a.d. l.a.g du Brownien est continue p.s ! en effet, $\psi(u) = \frac{u^2}{2}$ définit un P.A. I au sens de la définition 1 puisque pour chaque t, $e^{-t\frac{u^2}{2}}$ est de type positif. On régularise, on extrait les sauts, et on obtient une formule B ; l'unicité montre qu'alors $L(dx) \equiv 0$, $a = 0$, il n'y a donc pas de discontinuités !

Exercice : chercher où la démonstration est cachée

§ 5 - Classification rapide : restreignons nous au cas uni-dimensionnel

$$X_t = \sigma B_t + at + \int_{|x|\geq 1} x\, N_t(dx) + \int_{|x|<1} x\,(N_t(dx) - t\, L(dx))$$

1 : σB_t est, au facteur σ près, le mouvement brownien (à trajectoires continues)

2 : $a\, t$ est la translation de vitesse uniforme a

3.1 : si $\sigma = 0$, si $\int L(dx) < \infty$, on peut faire rentrer $\int x\, L(dx)$ dans la constante a, et si celle-ci est nulle, on a affaire à un Processus de Poisson généralisé, $X_t = \int x\, N_t(dx)$. $[L] = \int L(dx)$ est alors le paramètre d'un processus de Poisson, le nombre de discontinuités, p.s. fini dans tout compact $[0\ t]$. Le processus X_t reste nul un temps exponentiel $T > 0$ p.s., X_T est une v.a. répartie suivant $\dfrac{L(dx)}{[L]}$, on recommence.

3.2 : $\sigma = 0$, $\int L(dx) = +\infty$, mais $\int_{|x|<} |x|\, L(dx) < \infty$ on le fait rentrer dans a, et si $a = 0$, $X_t = \int x\, N_t(dx)$, somme de Poissons convergeant dans $\mathbb{L}^0$: une infinité de discontinuités dans tous $[0\ t]$, mais $X_t = X_t^1 - X_t^2$, ou $X_t^1 = \int_{x>0} x\, N_t(dx)$ est un processus croissant, X_t^2, indépendant de X_t^1, est également croissant. Chaque trajectoire est alors p.s. à variation bornée (pour la réciproque, voir plus loin)