Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Series Institut de Mathématiques,
Université de Strasbourg
Adviser P A Meyer

784

Séminaire de Probabilités XIV 1978/79

Edité par
J. Azéma et M. Yor

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1980

Editeurs

Jacques Azéma
Marc Yor
Laboratoire de Calcul des Probabilités
Université Paris 6
4, place Jussieu – Tour 56
75230 Paris Cedex 05
France

AMS Subject Classifications (1980): 60G07, 60G17, 60G44, 60H05, 60H10, 60J25, 60J55

ISBN 3-540-09760-0 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-09760-0 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Séminaire de Probabilités <14, 1978 – 1979, Paris>:
Séminaire de Probabilités XIV [Quatorze]: 1978/79 / éd. par J. Azéma et M. Yor. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980.
(Lecture notes in mathematics; Vol. 784:
Ser. Inst. de Mathématiques, Univ. de Strasbourg)
ISBN 3-540-09760-0 (Berlin, Heidelberg, New York)
ISBN 0-387-09760-0 (New York, Heidelberg, Berlin)
NE: Azéma, Jacques [Hrsg.]

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

SEMINAIRE DE PROBABILITES XIV

Par la volonté de "l'ancienne rédaction" (*), le Séminaire de Strasbourg se décentralise donc à Paris. Nous ne nous donnerons pas le ridicule de prétendre à une quelconque succession ; tout le monde sait ce qu'il en est.

Nous essaierons de faire en sorte que chacun continue à s'y sentir chez soi. Ce volume, qui se trouve domicilié au Laboratoire de Calcul des Probabilités au moment où son Directeur se prépare à le quitter, apparaîtra pour ce qu'il est :

Un hommage rendu à Robert FORTET.

J.A. / M.Y.

(*) Comme il est dit dans le volume précédent - (C. Dellacherie, P.A. Meyer, M. Weil).

SEMINAIRE DE PROBABILITES XIV

TABLE DES MATIÈRES

.../...

EXPOSES SUPPLEMENTAIRES.

Séminaire de Probabilités XIV
1978/79

DEUX EXEMPLES D'UTILISATION DE MESURES MAJORANTES

par B. HEINKEL

Les mesures majorantes sont devenues des outils essentiels dans l'étude des fonctions aléatoires gaussiennes (X. Fernique [3], [4]) et du théorème central-limite dans $C(S)$ (B. Heinkel [6], [7], [8]). Ainsi les principaux résultats obtenus précédemment par la méthode d'entropie dans le domaine des fonctions aléatoires gaussiennes (R.M. Dudley [1]) et dans celui du théorème central-limite dans $C(S)$ (R.M. Dudley, V. Strassen [2], E. Giné [5], N.C. Jain et M.B. Marcus [12]) apparaissent comme des corollaires des énoncés utilisant des mesures majorantes.

Dans cet exposé, on se propose d'étudier en détails deux exemples de situations dans lesquelles la méthode des mesures majorantes s'applique alors que la méthode d'entropie est impuissante.

EXEMPLE 1. UNE FONCTION ALEATOIRE GAUSSIENNE VERIFIANT L'HYPOTHESE DE MESURE MAJORANTE ET NE VERIFIANT PAS L'HYPOTHESE D'ENTROPIE.

Avant de donner cet exemple, on va rappeler les différentes définitions qui vont intervenir.

Soient T un ensemble et $\{Z(t), t \in T\}$ une fonction aléatoire gaussienne centrée. Désignons par τ l'écart induit par sa covariance, i.e. :

$$\forall s, t \in T, \quad \tau(s,t) = \sqrt{E(Z(s)-Z(t))^2}.$$

Posons pour simplifier :

$$g : [1, +\infty] \longrightarrow \overline{R^+} \quad ,$$

$$x \longmapsto \sqrt{\operatorname{Log} x} \ ,$$

et :

$\forall\, u > 0$, $N_\tau(u) = \operatorname{card}\{$ensemble minimal de τ-boules de rayon $\leq u$ suffisant à recouvrir $T\}$.

On a alors les deux définitions suivantes :

DEFINITIONS.

1) Z vérifie la condition d'entropie si :

$$\int_0 g(N_\tau(u))du < +\infty \ .$$

2) Une mesure de probabilité λ sur T muni de la tribu τ-borélienne $\mathcal{B}_\tau$ est une mesure majorante pour Z si :

$$(*) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ \sup_{t \in T} \int_0^\varepsilon g\left(\frac{1}{\lambda\{x : \tau(x,t) < u\}}\right)du = 0 \ .$$

Si $(*)$ est satisfaite, on dit que Z "vérifie l'hypothèse de mesure majorante".

Rappelons les faits suivants :

a) Chacune des conditions (1), (2) est suffisante pour que Z soit à trajectoires p.s. continues (Cf. [1], [4])

b) Dans le cas où Z est stationnaire sur $[0, 1]$, la condition (1) équivaut à la condition (2) avec λ égale à la mesure de Lebesgue et, de plus, (1) est nécessaire et suffisante pour la continuité p.s. des trajectoires de Z (Cf. [4]).

c) Si (1) est vérifiée, il existe une mesure λ vérifiant (2) (Cf. [4]).

d) Un exemple construit par M.B. Marcus [14] montre que dans le cas non stationnaire, (1) n'est pas nécessaire pour la continuité p.s. des trajectoires de Z .

La question qui reste donc posée est la suivante : "L'existence d'une mesure majorante est-elle nécessaire pour la continuité p.s. des trajectoires de Z, dans tous les cas ?"

Ceci montre l'intérêt de l'exemple construit ci-dessous qui établit que la condition (2) est strictement plus forte que (1).

Considérons la suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $C[0, 1]$ définie par :

$$\varphi_j(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \notin]2^{-j}, 2^{-j+1}[,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L_1 j \, L_4 j}} \quad \text{si} \quad t = 3.2^{-j-1} ,$$

linéaire ailleurs.

On a posé pour simplifier :

$\forall\, n = 1, 2, \ldots, 6$, $\forall\, x \geq 0$:

$$L_n(x) = \underbrace{\mathrm{Log}(\mathrm{Log} \ldots)}_{n} x , \quad \text{si} \quad x \geq \underbrace{\exp(\exp \ldots)}_{n-1} e ,$$

$L_n(x) = 1$ sinon.

On gardera cette notation tout au long de l'exposé.

Désignant par $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. gaussiennes, centrées, réduites et indépendantes, on pose :

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \theta_j \, \varphi_j(t) .$$

Il est clair que $\{Y(t), t \in [0, 1]\}$ est une fonction aléatoire gaussienne, centrée, à trajectoires p.s. continues.

Soit τ l'écart induit par sa covariance ; on va commencer par montrer (en s'inspirant de [14]) que Y ne vérifie pas la condition d'entropie.

Les supports des fonctions φ_j étant disjoints, on aura à partir d'un certain rang m_o :

$$N_\tau(2^{-m}) \geq 2^{2^{2m}}\, m^{-3/2} \quad ,$$

D'où :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m}\, g(N_\tau(2^{-m})) \geq K \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{3/4}} \; .$$

La fonction aléatoire Y ne vérifie donc pas la condition d'entropie car la série considérée ci-dessus est de même nature que l'intégrale intervenant dans (1).

Par contre, elle vérifie la condition de mesure majorante pour la mesure suivante :

$$\lambda = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \; ,$$

où pour tout entier j , λ_j désigne la mesure uniforme concentrée sur l'intervalle $]2^{-j}, 2^{-j+1}[$ de masse totale $cj^{-(L_5 j)/(L_6 j)}$ (c étant une constante numérique choisie de telle façon que λ soit une mesure de probabilité).

Pour montrer que la condition de mesure majorante est bien satisfaite, on va commencer par poser, pour simplifier les notations :

i) $\forall\, \varepsilon > 0$, $f(\varepsilon) = \sup\limits_{x \in [0,1]} \displaystyle\int_0^\varepsilon g\left(\frac{1}{\lambda(y : \tau(x,y) < u)}\right) du$,

ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, x \in [0,1]$, $f(\varepsilon, x) = \displaystyle\int_0^\varepsilon g\left(\frac{1}{\lambda(y : \tau(x,y) < u)}\right) du$,

iii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 n L_4 n}}$,

iv) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n = 3.2^{-n-1}$,

v) $\beta_n = n^{(L_5 n)/(L_6 n)}$.

Il suffit évidemment de montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = 0 \; .$$

On va commencer par majorer les termes du type $f(\alpha_n, x_j)$, en distinguant trois cas :

<u>1er cas</u> : $j \leq n$

Dans ce cas $\alpha_j \geq \alpha_n$ et :

$$f(\alpha_n, x_j) \leq \int_0^{\alpha_n} g\left(\frac{1}{\lambda(y : |x_j - y| < \frac{1}{\alpha_j} 2^{-(j+1)} u)}\right) du .$$

Soit encore :

$$f(\alpha_n, x_j) \leq \int_0^{\alpha_n} g\left(\frac{\alpha_j \beta_j}{cu}\right) du ,$$

d'où l'on déduit :

$$f(\alpha_n, x_j) \leq \frac{1}{c} \int_0^{c\alpha_n} g\left(\frac{1}{u}\right) du + \alpha_n \, g(\alpha_j \beta_j) .$$

Pour n assez grand, on aura :

$$f(\alpha_n, x_j) \leq K_1 \sqrt{\alpha_n} + \frac{1}{(L_4 n)^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{K_2}{(L_4 n)^{\frac{1}{4}}} .$$

<u>2ème cas</u> : $j > n$

Dans ce cas $\alpha_j < \alpha_n$ et on a :

$$f(\alpha_n, x_j) \leq f(\alpha_j, x_j) + \int_{\alpha_j}^{\alpha_n} g\left(\frac{1}{\lambda(y \in]2^{-n}, 2^{-n+1}[: \tau(x_n, y) < u - \alpha_j)}\right) du ,$$

ce qui se majore pour n assez grand par :

$$f(\alpha_n, x_j) \leq \frac{K_2}{(L_4 n)^{\frac{1}{4}}} + \int_0^{\alpha_n - \alpha_j} g\left(\frac{\alpha_n \beta_n}{cu}\right) du$$

$$\leq \frac{K_2}{(L_4 n)^{\frac{1}{4}}} + \int_0^{\alpha_n} g\left(\frac{\alpha_n \beta_n}{cu}\right) du \leq \frac{K_2}{(L_4 n)^{\frac{1}{4}}} .$$

3ème cas : majorer $f(\alpha_n, 0)$:

$$f(\alpha_n, 0) = \sum_{j=n}^{+\infty} \int_{\alpha_{j+1}}^{\alpha_j} g\left(\frac{1}{\lambda(y : \tau(0, y) < u)}\right) du$$

$$\leq \sum_{j=n}^{+\infty} (\alpha_j - \alpha_{j+1})\, g\left(\frac{1}{c\alpha_{j+1} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\beta_k}}\right) .$$

Pour n assez grand, le terme général de cette série sera majoré par :

$$(\alpha_j - \alpha_{j+1})\, g\left(\frac{2}{\alpha_{j+1}}\right) ,$$

quantité équivalente à :

$$\frac{K_3 (L_2 j)^{\frac{1}{2}}}{j (L_1 j)^{3/2} (L_4 j)^{\frac{1}{2}}} .$$

On a donc :

$$\lim_{n \to \infty} f(\alpha_n, 0) = 0 .$$

Remarquons à présent que, vue la forme particulière de λ, on a :

$$f(\alpha_n) = \sup\left(f(\alpha_n, 0) , \sup_{j=1}^{\infty} f(\alpha_n, x_j)\right) .$$

En vertu des trois cas particuliers étudiés plus haut, on a bien :

$$\lim_{n \to +\infty} f(\alpha_n) = 0 .$$

La fonction aléatoire gaussienne Y vérifie donc l'hypothèse de mesure majorante pour la mesure λ.

EXEMPLE 2. UTILISATION DE MESURES MAJORANTES POUR L'ETUDE DU THEOREME CENTRAL-LIMITE DANS $C([0, 1])$.

On va étudier une v.a. X à valeurs dans $C([0, 1])$, centrée, telle que $E(\|X\|_\infty^2) = +\infty$, dont on puisse établir qu'elle vérifie le théorème central-limite à l'aide du critère en termes de mesures majorantes donné dans [8] ; ceci montre la force de ce critère car les conditions générales en termes d'entropie, suffisantes pour la propriété de limite centrale, ne permettent pas d'atteindre des v.a. dont la norme n'est pas de carré intégrable.

L'idée de la construction est la même que celle utilisée par N.C. Jain [11] pour mettre en évidence une v.a. Z à valeurs dans $C([0, 1])$, telle que $E(\|Z\|_\infty^2) = +\infty$, vérifiant le théorème central-limite mais pas la loi du logarithme itéré. Rappelons brièvement cette idée : étant donné $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de copies indépendantes de Z , on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(Z) = \sum_{k=1}^{n} Z_k .$$

(La notation "$S_n(.)$" sera gardée dans la suite de l'exposé.)

Pour t assez grand, $P\left\{\frac{\|S_n(Z)\|_\infty}{\sqrt{n}} > t\right\}$ se majore de façon agréable à partir de l'inégalité de J. Hoffmann-Jørgensen [10] sur l'évaluation de la loi d'une somme de v.a. indépendantes et symétriques et ceci permet de montrer que Z vérifie le théorème central-limite.

Venons-en maintenant à notre exemple.

Considérons une suite de v.a.r. indépendantes, symétriques, $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, toutes de même loi que ξ_1 :

$$\begin{aligned} P\{|\xi_1| > t\} &= \frac{c}{t^2\ L_1 t (L_2 t)^2} , &\forall\ t \geq e^e , \\ &= 1 , &0 < t < e^e , \end{aligned}$$

(on a donc : $c = e^{2e+1}$).

Notons pour tout entier j :

$$\beta_j = [e^{jL_1 j}] .$$

Soit $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $C[0,1]$ construite dans l'exemple 1 ; on pose :

$$\forall\, t \in [0,1] , \quad X(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \, \varphi_{\beta_j}(t) .$$

On va établir que X a bien les propriétés annoncées.

Montrons tout d'abord que $\{X(t) , t \in [0,1]\}$ est une fonction aléatoire à trajectoires p.s. continues ; il suffit évidemment d'établir le lemme suivant :

LEMME 1. $\hat{\tau}$ <u>désignant l'écart induit par la covariance de</u> X , X <u>est p.s.</u> $\hat{\tau}$<u>-continu</u>. <u>De plus</u>, X <u>est une v.a. à valeurs dans</u> $C[0,1]$.

<u>Démonstration.</u> Il est clair que les termes composant la série définissant X sont p.s. $\hat{\tau}$-continus. On a :

$$\forall\, a > 0 , \quad P\{|\xi_j| > a \frac{1}{\|\varphi_{\beta_j}\|_\infty}\} \geq \frac{K}{a^2 \; j(L_1 j)^2} ,$$

donc :

$$\forall\, a > 0 , \quad \sum_{j=1}^{\infty} P\{|\xi_j| > a \frac{1}{\|\varphi_{\beta_j}\|_\infty}\} < +\infty .$$

Les fonctions φ_j ayant des supports disjoints, la série définissant X est p.s. $\hat{\tau}$-uniformément convergente. X est donc p.s. $\hat{\tau}$-continue.

$\hat{\tau}$ étant clairement continue par rapport à la distance usuelle, X est une v.a. à valeurs dans $C[0,1]$.

Remarquons que X est centrée et que :

$$\sup_{s \in [0,1]} EX^2(s) < +\infty .$$

Par contre :

LEMME 2. $E\|X\|_\infty^2 = +\infty$.

Démonstration. En vertu de [13], Théorème 3.3, il suffira de montrer que :

$$\forall\ a > 0\ ,\quad \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{(|\xi_j|\,\|\varphi_{\beta_j}\|_\infty > a)} |\xi_j|^2\ \|\varphi_{\beta_j}\|_\infty^2\ dP = +\infty .$$

Le terme général de cette série étant :

$$a^2 P\{|\xi_j| > \frac{a}{\|\varphi_{\beta_j}\|_\infty}\} + 2\ \|\varphi_{\beta_j}\|_\infty^2 \int_{\frac{a}{\|\varphi_{\beta_j}\|_\infty}}^{+\infty} xP\{|\xi_j| > x\}\ dx\ ,$$

soit encore :

$$a^2 P\{|\xi_j| > \frac{a}{\|\varphi_{\beta_j}\|_\infty}\} + \frac{c}{jL_1 jL_2 jL_3 j}\ ,$$

on a bien le résultat annoncé.

Posons : $\alpha = \sqrt{E\xi_1^2}$.

On remarque : $\hat{\tau} \leq \alpha\tau$,

où τ est l'écart induit par la covariance de la fonction aléatoire gaussienne construite dans l'exemple 1.

Dans toute la suite, on désignera par ψ la fonction :

$$\psi : R^+ \longrightarrow R^+\ ,$$

$$\psi(x) = \int_0^x (e^{t^2} - 1)\ dt\ .$$

Pour toute fonction $f : [0\,,\,1] \longrightarrow R$, on notera :

$$\forall\ s\,,\, t \in [0\,,\,1]\ ,\quad \tilde{f}(s\,,\,t) = \frac{f(s) - f(t)}{\hat{\tau}(s\,,\,t)}\ I_{(\hat{\tau} \neq 0)}(s\,,\,t)\ .$$

Pour montrer que X vérifie le théorème central-limite, on n'a pas besoin du fait que $\tilde{X}$ soit p.s. à valeurs dans un sous-espace séparable de l'espace d'Orlicz $L^{\psi}(\lambda\otimes\lambda)$ défini sur $[0,1]\times[0,1]$ par ψ et $\lambda\otimes\lambda$, mais seulement du fait que la norme de $\tilde{X}$ est une v.a.r. (Cf. Lemme 5 ci-dessous) ; dans ce cas particulier, on peut montrer aisément que $\tilde{X}$ est à valeurs dans un sous-espace séparable de $L^{\psi}(\lambda\otimes\lambda)$, c'est pourquoi on va l'établir.

On supposera $L^{\psi}(\lambda\otimes\lambda)$ muni de la norme N' :

$$N'(f) = \inf\{\alpha>0 : \int \exp\frac{f^2}{\alpha^2}\, d\lambda\otimes\lambda \leq e\}.$$

LEMME 3. <u>Il existe un sous-espace séparable</u> H <u>de</u> $L^{\psi}(\lambda\otimes\lambda)$ <u>tel que</u> $\tilde{X}\in H$ <u>presque sûrement</u>.

<u>Démonstration</u>. Désignons par h_j les fonctions $\tilde{\varphi}_{\beta_j}$. Il est clair que $h_j\in L^{\psi}(\lambda\otimes\lambda)$, pour tout $j\in\mathbb{N}$. Montrons que le sous-espace fermé H engendré par les h_j convient.

Par construction, il existe une constante d telle que :

$$\forall\, j\in\mathbb{N}\ ,\quad \lambda(]2^{-\beta_j}, 2^{-\beta_j+1}[) \leq d e^{-jL_1 j}.$$

n étant un entier fixé, on pose :

$$\alpha_n = \frac{1}{\alpha}\sup_{k\geq n}\frac{|\xi_k|}{\sqrt{kL_1 k}},$$

et :

$$Y_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\xi_k\,\varphi_{\beta_k}.$$

Pour tout $j\in\mathbb{N}$, on note :

$$I_o = \{0\},$$

$$\forall\, j\geq 1\ ,\quad I_j =]2^{-j}; 2^{-j+1}[\ .$$

On a :

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \exp\left(\frac{\tilde{Y}_n^2(s,t)}{\alpha_n^2}\right) d\lambda(s)\, d\lambda(t) = \sum_{k,j} \int_{I_k \times I_j} \exp\left(\frac{\tilde{Y}_n^2(s,t)}{\alpha_n^2}\right) d\lambda(s)\, d\lambda(t)$$

$$= \sum_{k,j} a_{kj} .$$

Posons à présent :

$A_1 = \{(k, j) | k \text{ et } j < n\}$,

$A_2 = \{(k, j) | k \geq n , j < n , k$ n'est pas du type $\beta_r\}$,

$A_3 = \{(k, j) | k \geq n , j < n , k$ est du type $\beta_r\}$,

$A_4 = \{(k, j) | k \geq n , j \geq n , k$ est du type β_r , mais pas $j\}$,

$A_5 = \{(k, j) | k \geq n , j \geq n , k$ et j sont du type $\beta_r\}$,

$A_6 = \{(k, j) | k \geq n , j \geq n$, ni k , ni j n'est du type $\beta_r\}$.

La somme précédente s'écrira alors :

$$\sum_{(k,j)\in A_1} a_{kj} + 2 \sum_{(k,j)\in A_2} a_{kj} + 2 \sum_{(k,j)\in A_3} a_{kj} + 2 \sum_{(k,j)\in A_4} a_{kj} + \sum_{(k,j)\in A_5} a_{kj} + \sum_{(k,j)\in A_6} a_{kj}$$

$$\leq 1 + 2\Big(\sum_{(k,j)\in A_3} a_{kj} + \sum_{(k,j)\in A_4} a_{kj} + \sum_{(k,j)\in A_5} a_{kj}\Big)$$

$$\leq 1 + 2\Big(2d \sum_{\substack{k\geq n \\ k=\beta_r}} \exp(-rL_1 r) + d^2 \sum_{\substack{k\geq n, j\geq n \\ k=\beta_r \\ j=\beta_s}} \exp-(rL_1 r + sL_1 s)\Big).$$

Il est clair que pour n assez grand, cette dernière quantité est inférieure à e . Si l'on montre que :

i) $\alpha_n < +\infty$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$,

ii) $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$ (et ceci suffira à impliquer la convergence presque sûre par monotonie),

le Lemme 3 sera établi.

Or :

$$P\{\alpha_n > t\} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{K}{t^2 \; kL_1 k(L_1 t\sqrt{k})(L_2 t\sqrt{k})^2} ,$$

et ceci démontre à la fois i) et ii).

LEMME 4. X <u>vérifie le TCL dans</u> $C[0,1]$.

<u>Démonstration</u>. Remarquons qu'en vertu de l'inégalité de J. Hoffmann-Jørgensen [10] sur la loi des sommes de v.a. indépendantes et symétriques, on a :

$\exists\, K > 0$ et $t_o < +\infty$, tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} , \quad \forall\, t \geq t_o , \quad P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}\right| > t\right\} \leq \frac{K}{t^2 L_1\, t(L_2\, t)^2} .$$

On aura donc, par le calcul fait pour établir le lemme 3 :

$\exists\, L > 0$ et $t_1 < +\infty$, tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, t \geq t_1$,

$$P\{N'(\frac{S_n(\tilde{X})}{\sqrt{n}}) > t\} \leq L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 kL_1\, k(L_1\, tk)(L_2\, tk)^2} .$$

Le Lemme 4 est alors une conséquence immédiate du résultat suivant (Cf. [8]) :

LEMME 5. <u>Soient</u> (S, d) <u>un espace métrique compact</u>, X <u>une v.a. à valeurs dans</u> $C(S)$, <u>centrée</u>, <u>telle que</u> :

$$\sup_{s \in S} EX^2(s) < +\infty .$$

<u>On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites</u> :

a) <u>Il existe une fonction de Young</u> φ , <u>un écart</u> ρ <u>sur</u> S , d-<u>continu</u>, <u>tel</u>

que de plus X soit ρ-continu et une mesure de probabilité λ sur (S, β_ρ) vérifiant :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in S} \int_0^\varepsilon \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\lambda^2(y : \rho(x,y) < u)}\right) du = 0 .$$

b) Si l'on pose :

$$\tilde{X}(s, t) = \frac{X(s) - X(t)}{\rho(s, t)} I_{(\rho \neq 0)}(s, t) ,$$

alors $\tilde{X} \in L^\varphi(\lambda \otimes \lambda)$ (espace d'Orlicz défini sur $S \times S$ par $\lambda \otimes \lambda$ et φ, muni de la norme de Luxemburg N).

c) On a : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, M < +\infty$ tel que :

$$\sup_n P\{N(\frac{S_n(\tilde{X})}{\sqrt{n}}) > M\} < \varepsilon .$$

Sous ces hypothèses, X vérifie le TCL dans $C(S)$.

Remarque. G. Pisier [15] a construit des exemples de v.a. Z à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(B, \|.\|)$ (en l'occurence ℓ^α avec $\alpha \in]2, +\infty[$) vérifiant à la fois le théorème central-limite et la loi du logarithme itéré et telles que $E(\|Z\|^2) = +\infty$. La v.a. X telle que $E(\|X\|_\infty^2) = +\infty$, vérifiant le théorème central-limite, construite ci-dessus, vérifie elle aussi la loi du logarithme itéré. En effet, on a le résultat suivant [9] :

LEMME 6. Une v.a. Z à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(B, \|.\|)$, centrée, vérifiant le théorème central-limite et telle que :

$$E\left(\frac{\|Z\|^2}{L_2\|Z\|}\right) < +\infty ,$$

vérifie également la loi du logarithme itéré.

Pour établir que X vérifie la loi du logarithme itéré, il suffit donc de montrer que :

$$E\left(\frac{\|X\|_\infty^2}{L_2\|X\|_\infty}\right) < +\infty .$$

Remarquons à cet effet qu'on a pour t assez grand :

$$P\left\{\frac{\|X\|_\infty}{\sqrt{L_2\|X\|_\infty}} > t\right\} \le P\left\{\|X\|_\infty > t\sqrt{L_2 t}\right\} \le K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2(L_2 t)\, nL_1 n\, (L_1 nt)(L_2 nt)^2}$$

$$\le \frac{K'}{t^2 L_1 t (L_2 t)^{3/2}} ,$$

d'où l'on déduit aisément :

$$E\left(\frac{\|X\|_\infty^2}{L_2\|X\|_\infty}\right) < +\infty .$$