

**Cornell University Library
reformatted this volume
to digital files to preserve
the informational content
of the deteriorated original.**

**The original volume was scanned
bitonally at 600 dots per inch
and compressed prior to storage
using ITU Group 4 compression.**

1997

Cornell University Library

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE
SAGE ENDOWMENT FUND
THE GIFT OF

Henry W. Sage

1891

A 226.58.3

MATHEMATICS

14/9/08

9963

LEHRBUCH
DER
A L G E B R A

VON
HEINRICH WEBER

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG

ZWEITE AUFLAGE

DRITTER BAND

MIT ZWEI ABBILDUNGEN IM TEXT

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1908

D

ELLIPTISCHE
FUNKTIONEN
UND
ALGEBRAISCHE ZAHLEN

VON

HEINRICH WEBER

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG

ZWEITE AUFLAGE

MIT ZWEI ABBILDUNGEN IM TEXT

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1908

zu,

S34a
14/2/08

A. 226583

Alle Rechte,
namentlich dasjenige der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Published May 24, 1908.

Privilege of Copyright in the United States reserved under the Act
approved March 3, 1905 by Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig,
Germany.

RICHARD DEDEKIND,
DAVID HILBERT, HERMANN MINKOWSKI

IN HERZLICHER FREUNDSCHAFT

GEWIDMET.

V O R W O R T.

Es ist mir vergönnt, den Plan einer Weiterführung meines Lehrbuches der Algebra, den ich vor zwölf Jahren in der Vorrede zur ersten Auflage des zweiten Bandes angekündigt habe, nach mannigfaltigen Abhaltungen noch auszuführen. Durch das Entgegenkommen der Verlagsfirma erscheint dieser dritte Band der Algebra zugleich als zweite Auflage der im Jahre 1891 zum erstenmal gedruckten „Elliptischen Funktionen und algebraischen Zahlen“.

Er beschäftigt sich hauptsächlich mit dem weiteren Ausbau der mannigfaltigen Anwendungen der Algebra und besonders der Theorie der quadratischen Körper auf die aus den elliptischen Funktionen hervorgegangenen Probleme, die uns das erste über die Kreisteilung hinausgehende Beispiel von algebraischen Zahlen liefern, deren Gesetze einigermaßen bekannt sind. Als Grundlage dazu dient eine eingehendere Behandlung der quadratischen Körper mit negativer Diskriminante. Freilich ist auch hier nicht alles erreicht, was ich mir als letztes Ziel gesteckt hatte. So mußte die Ausführung der Theorie der relativ zyklischen Körper noch zurückgestellt werden — hoffentlich nur einstweilen.

Dagegen habe ich, einem mehrfach an mich herangetretenen Wunsche entsprechend, einen Abriß der Theorie der algebraischen Funktionen auf arithmetischer Grundlage beigefügt, der

sich im wesentlichen an die Abhandlung von Dedekind und mir im 92. Bande von Crelles Journal anschließt, aber durch Anwendung der Theorie der Funktionale, auf die ich im zweiten Bande die Theorie der algebraischen Zahlen gegründet habe, wie mir scheint, eine Vereinfachung erreicht.

Straßburg, im Mai 1908.

H. Weber.

INHALTSVERZEICHNIS.

Erstes Buch.

Analytischer Teil.

Erster Abschnitt.

Die elliptischen Integrale.

	Seite
§ 1. Definition der elliptischen Integrale	3
§ 2. Doppelverhältnisse	5
§ 3. Lineare Transformation des elliptischen Differentials	8
§ 4. Die Legendresche Normalform	11
§ 5. Die Weierstrasssche Normalform	13
§ 6. Elliptische Kurven	18
§ 7. Elliptische Raumkurven vierter Ordnung	23
§ 8. Das Jacobische Transformationsprinzip	30
§ 9. Die Transformation zweiten Grades	32
§ 10. Die Transformation dritten Grades	35
§ 11. Die drei Gattungen elliptischer Integrale	38
§ 12. Darstellung der elliptischen Integrale durch die einfachsten Grundintegrale	40
§ 13. Das Additionstheorem	43
§ 14. Ursprung der elliptischen Funktionen	49

Zweiter Abschnitt.

Theta - Funktionen.

§ 15. Voraussetzungen aus der Funktionentheorie	53
§ 16. Periodizität	56
§ 17. Die Funktionen T	60
§ 18. Relationen zwischen verwandten T -Funktionen	65
§ 19. T -Funktionen erster Ordnung	67
§ 20. Die ϑ -Funktion	69
§ 21. Die Theta - Funktionen verschiedener Charakteristiken. Haupt- charakteristiken	71
§ 22. Das Additionstheorem	76
§ 23. Die Derivierten der ϑ -Funktionen	81
§ 24. Darstellung der ϑ -Funktionen durch unendliche Produkte	83

	Seite
§ 25. Darstellung der ϑ -Funktionen durch unendliche Reihen	86
§ 26. Entwicklung von ϑ -Quotienten	88

Dritter Abschnitt.

Transformation der Theta-Funktionen.

§ 27. Das Transformationsprinzip	93
§ 28. Zusammensetzung der Transformationen	96
§ 29. Zusammensetzung der Transformationen aus einfacheren	99
§ 30. Die linearen Fundamentaltransformationen	101
§ 31. Die linearen Fundamentaltransformationen der ϑ -Funktionen	103
§ 32. Die Haupttransformationen zweiter Ordnung der ϑ -Funktionen	105
§ 33. Die Haupttransformationen ungerader Ordnung	110
§ 34. Die Funktionen $\eta(\omega)$, $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$	112
§ 35. Die Weierstrasssche σ -Funktion	116
§ 36. Die Funktionen σ_{00} , σ_{01} , σ_{10}	119
§ 37. Darstellung der σ -Funktionen durch ϑ -Funktionen	122
§ 38. Lineare Transformationen der Funktion $\eta(\omega)$	124
§ 39. Lineare Transformation der ϑ -Funktionen	130
§ 40. Lineare Transformation der Funktionen $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$	132

Vierter Abschnitt.

Die elliptischen Funktionen.

§ 41. Zusammenhang der ϑ -Funktionen mit den elliptischen Integralen	135
§ 42. Jacobis elliptische Funktionen	137
§ 43. Die Jacobischen Funktionen $\Theta(v)$, $H(v)$	141
§ 44. Additionstheorem der elliptischen Funktionen	142
§ 45. Die lineare Transformation der elliptischen Funktionen	147
§ 46. Die Weierstrasssche \wp -Funktion	150
§ 47. Die elliptischen Transzendenten zweiter Gattung	153
§ 48. Die elliptischen Transzendenten dritter Gattung	156
§ 49. Die Transzendenten zweiter und dritter Gattung von Weierstrass	160
§ 50. Entwicklungen der elliptischen Funktionen	162

Fünfter Abschnitt.

Die Modulfunktionen.

§ 51. Die elliptischen Differentialgleichungen	166
§ 52. Die unabhängige Variable x^2 . Lineare Differentialgleichung für K	167
§ 53. Die Lösungen der Gleichung $j(\omega) = j(\omega')$	174
§ 54. Die Modulfunktionen	176
§ 55. Darstellung der elliptischen Funktionen durch v und x^2	181
§ 56. Potenzreihen für die Weierstrassschen Funktionen $\wp(u)$, $\sigma(u)$	185

Sechster Abschnitt.

Multiplikation und Teilung der elliptischen Funktionen.

§ 57. Multiplikation der elliptischen Funktionen	190
§ 58. Multiplikation der Funktion $\wp(u)$	196

Inhaltsverzeichnis.

		XI
		Seite
§ 59.	Die Teilung durch 2	200
§ 60.	Die Teilung durch eine ungerade Zahl	202
§ 61.	Die Teilung der Perioden	204
§ 62.	Die Abelschen Relationen	205
§ 63.	Die Galoissche Gruppe der Teilungsgleichung	208
§ 64.	Die irreduzibeln Faktoren der Teilungsgleichung	216
§ 65.	Zurückführung der Teilungsgleichung auf Transformationsgleichungen	217

Siebenter Abschnitt.

Theorie der Transformationsgleichungen.

§ 66.	Bildung von Transformationsgleichungen	225
§ 67.	Besondere Transformationsgleichungen	228
§ 68.	Zweite Darstellung der Wurzeln der Transformationsgleichungen	231
§ 69.	Die Invariantengleichung	237
§ 70.	Transformationsgleichungen erster Stufe	245
§ 71.	Die Transformationsgleichungen für γ_2 und γ_3	247
§ 72.	Multiplikatorgleichungen erster Stufe	248
§ 73.	Die Schlaeflichen Modulargleichungen	256
§ 74.	Die Form der Schlaeflichen Modulargleichungen	265
§ 75.	Die irrationalen Formen der Modulargleichungen	269
§ 76.	Zusammengesetzte Transformationsgrade	274
§ 77.	Geometrische Deutung der irrationalen Modulargleichungen als Korrespondenzen	280

Achter Abschnitt.

Die Gruppe der Transformationsgleichungen und die Gleichung 5ten Grades.

§ 78.	Die Galoissche Gruppe der Transformationsgleichungen für einen Primzahlgrad	284
§ 79.	Untersuchung der Gruppe \mathfrak{Q}_0	290
§ 80.	Normalteiler der Gruppe \mathfrak{Q}_0	294
§ 81.	Nichtnormale Teiler von \mathfrak{Q}_0	299
§ 82.	Teiler von \mathfrak{Q}_0 vom Index p für $p = 5, 7, 11$	305
§ 83.	Verschiedene Resolventen 5ten Grades für den 5ten Transformationsgrad	309

Zweites Buch.

Quadratische Körper.

Neunter Abschnitt.

Diskriminante.

§ 84.	Definition der Diskriminanten	321
§ 85.	Das erweiterte Legendre-Jacobische Symbol	322
§ 86.	Die Gauss'schen Summen	328

Zehnter Abschnitt.

Algebraische Zahlen und Formen.

	Seite
§ 87. Ideale und Formen in algebraischen Körpern	330
§ 88. Idealklassen und Formenklassen	333
§ 89. Komposition der Formen und Multiplikation der Ideale	335

Elfter Abschnitt.

Ideale in quadratischen Körpern.

§ 90. Diskriminante des quadratischen Körpers	338
§ 91. Ideale und Formen in quadratischen Körpern	340
§ 92. Primideale im quadratischen Körper	342
§ 93. Darstellung von Zahlen als Idealnormen	344
§ 94. Das quadratische Reziprozitätsgesetz	345
§ 95. Äquivalente Formen und Ideale im quadratischen Körper	347

Zwölfter Abschnitt.

Ordnungen im quadratischen Körper.

§ 96. Diskriminanten der Ordnungen	351
§ 97. Ordnungen und Ideale	353

Dreizehnter Abschnitt.

Äquivalenz nach Zahlgruppen.

§ 98. Zahlgruppen in den Ordnungen	358
§ 99. Äquivalenz in den Ordnungen	361
§ 100. Idealklassen nach den Ordnungen	362

Vierzehnter Abschnitt.

Komposition der Formen und Ideale.

§ 101. Komposition in den Ordnungen	368
§ 102. Komposition der Ordnungen	373

Fünfzehnter Abschnitt.

Geschlechter der quadratischen Formen.

§ 103. Darstellung von Zahlen durch quadratische Formen	376
§ 104. Charaktere und Geschlechter der quadratischen Formen	380
§ 105. Anwendung des Legendreschen Symbols	385
§ 106. Die Geschlechter der Idealklassen	388
§ 107. Zusammensetzung der Normenrestgruppen	389
§ 108. Normenreste der Primzahlpotenzen	390
§ 109. Die Geschlechter der Ideale	395

Sechzehnter Abschnitt.

Klassenzahl in quadratischen Körpern.

	Seite
§ 110. Fundamentale Einheiten in den Ordnungen	398
§ 111. Die Dirichletsche Grenzformel	402
§ 112. Klassenzahl	405
§ 113. Die Anzahl der Geschlechter	409

Drittes Buch.

Komplexe Multiplikation.

Siebzehnter Abschnitt.

Elliptische Funktionen und quadratische Formen.

§ 114. Singuläre Perioden der doppelt periodischen Funktionen . . .	413
§ 115. Die singulären Werte der Invariante $j(\omega)$	418
§ 116. Klassenzahlrelationen	423
§ 117. Arithmetische Natur der Klassenfunktion $H_m(u)$	426
§ 118. Komposition der quadratischen Formen	428
§ 119. Die Diskriminante der Invariantengleichung	431

Achtzehnter Abschnitt.

Galoissche Gruppe der Klassengleichung.

§ 120. Relationen zwischen den Klasseninvarianten derselben Diskriminante	435
§ 121. Trennung der entgegengesetzten Klassen	437
§ 122. Irreducibilität	442
§ 123. Beziehungen zwischen den Klasseninvarianten in den verschiedenen Ordnungen	450
§ 124. Klassenkörper und Ordnungskörper	455

Neunzehnter Abschnitt.

Berechnung der Klasseninvarianten.

§ 125. Die Klasseninvariante γ_2	457
§ 126. Die Klasseninvarianten $f(\omega)^{24}$	462
§ 127. Die Potenzen von $f(\omega)$ als Klasseninvarianten	467
§ 128. Die ersten Fälle der Berechnung von $f(\sqrt{-m})$	474
§ 129. Anwendung der Transformation zweiter Ordnung zur Berechnung von Klasseninvarianten	476
§ 130. Berechnung von Klasseninvarianten aus den Schlaefflischen Modulargleichungen	477
§ 131. Berechnung von Klasseninvarianten aus den irrationalen Formen der Modulargleichungen	485

		Seite
§ 132.	Die Schlaefflische Modulargleichung für den 23sten Transformationsgrad	489
§ 133.	Die Resolventen 7ten und 11ten Grades für den 7ten und 11ten Transformationsgrad	491

Zwanzigster Abschnitt.

Die Multiplikatorgleichung in der komplexen Multiplikation.

§ 134.	Die Klasseninvariante $\gamma_s(\omega)$	500
§ 135.	Die Klasseninvarianten x^2 und x	505
§ 136.	Quadratische Transformationsgrade	507
§ 137.	Zurückführung ungerader Diskriminanten auf gerade	512
§ 138.	Zerfallung der Klassengleichung nach den Geschlechtern	513
§ 139.	Beispiele	521

Einundzwanzigster Abschnitt.

Die Normen der Klasseninvarianten $f(\omega)$.

§ 140.	Konvergenz einer unendlichen Reihe	525
§ 141.	Die Kroneckersche Grenzformel	526
§ 142.	Die Normen der Klasseninvarianten $f(\omega)$	533
§ 143.	Partialnormen von $f(\omega)$	541
§ 144.	Berechnung einiger weiterer Klasseninvarianten	545

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Cayleys Entwicklung der Modulfunktionen.

§ 145.	Grenzwerte für $s = 1$	548
§ 146.	Ein Satz über Reihenkonvergenz	551
§ 147.	Entwicklung von f, f_1, f_2	553
§ 148.	Elementare Ableitung der Entwicklungen	557
§ 149.	Entwicklungen für die Funktion $\log \eta(\omega)$	559

Viertes Buch.

Klassenkörper.

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Der Teilungskörper.

§ 150.	Die homogenen Weierstrassschen Funktionen	563
§ 151.	Die komplexe Multiplikation der Funktion $\wp(u)$	566
§ 152.	Die Pole der Funktion $\wp(u)$	568
§ 153.	Die Funktion $\tau(u)$	571
§ 154.	Der Teilungskörper	573
§ 155.	Multiplikation der elliptischen Funktionen für einen ungeraden Multiplikator	576
§ 156.	Übergang zu den singulären Moduln	581

	Seite
§ 157. Komplexe Multiplikatoren	583
§ 158. Zerlegung der Funktion $A(x)$	590
§ 159. Primideale	592
§ 160. Primideale ersten Grades in \mathfrak{X}_m	594
§ 161. Zahlgruppen und Idealgruppen	596
§ 162. Die durch ein Ideal teilbaren Ideale der Hauptklassen	599
§ 163. Die Dirichletschen Summen	602
§ 164. Der Klassenkörper	607
§ 165. Primideale in den Klassen	611
§ 166. Primideale in den Idealklassen	612
§ 167. Primzahlen in Linearformen	613
§ 168. Reduktion der Klassengleichung in den Kreisteilungskörpern	616
§ 169. Beziehung der Teilungskörper zu dem Klassenkörper	619

Fünftes Buch.

Algebraische Funktionen.

Vierundzwanzigster Abschnitt.

Algebraische Funktionen einer Variablen.

§ 170. Einleitendes	623
§ 171. Definition der algebraischen Funktionen	624
§ 172. Normen und Spuren	627
§ 173. Diskriminanten	631
§ 174. Die Potenzsummen	632
§ 175. Ganze Funktionen von z	635
§ 176. Minimalbasis und Körperdiskriminante	637

Fünfundzwanzigster Abschnitt.

Funktionale.

§ 177. Rationale Funktionale	640
§ 178. Funktionale des Körpers $\overline{\Omega}$	642
§ 179. Ganze Funktionale des Körpers $\overline{\Omega}$	643
§ 180. Teilbarkeit von Funktionalen. Einheiten	644
§ 181. Größter gemeinschaftlicher Teiler	645
§ 182. Primfunktionale in $\overline{\Omega}$	646
§ 183. Basen und Basisformen der Funktionale	651
§ 184. Basisform und Verzweigungsfunktional	654
§ 185. Die gebrochenen Funktionen in Ω und die Taylorsche Entwicklung	658
§ 186. Birationale Transformation	660

Sechszwanzigster Abschnitt.

Zahlenwerte der algebraischen Funktionen.

§ 187. Der Punkt	663
§ 188. Ordnungszahlen	666

	Seite
§ 189. Polygone	667
§ 190. Verzweigungspunkte und Verzweigungszahlen	669
§ 191. Polygonquotienten und Polygonklassen	670
§ 192. Polygonscharen	672
§ 193. Normalbasen	676
§ 194. Differentialquotienten	679
§ 195. Darstellung der Differentialquotienten durch Polygonquotienten	682
§ 196. Geschlecht des Körpers Ω	685

Siebenundzwanzigster Abschnitt.

Algebraische und Abelsche Differentiale.

§ 197. Differentiale in Ω	688
§ 198. Die Polygonschar erster Gattung	690
§ 199. Der Riemann-Rochsche Satz	695
§ 200. Differentiale zweiter und dritter Gattung	699
§ 201. Die Residuen	702

T a b e l l e n .

I. Entwicklungen der sechzehn ϑ -Quotienten (S. 88)	711
II. Zweite Form der Entwicklung der sechzehn ϑ -Quotienten (S. 91)	713
III. Entwicklung der ϑ -Quotienten in trigonometrischen Reihen (S. 92)	716
IV. Entwicklungen der elliptischen Funktionen (S. 163)	718
V. Entwicklung der Transzendenten zweiter Gattung (S. 164)	720
VI. Verzeichnis von Klasseninvarianten (zum neunzehnten Abschnitt) .	721
Alphabetisches Register	727

ERSTES BUCH.

ANALYTISCHER THEIL.
