Lecture Notes ...
Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

225

Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1971

AMS Subject Classifications (1970): 14-02, 14C15, 14F15, 14K30, 18E30

ISBN 3-540-05647-5 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-05647-5 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS MARIE

1966-67

THEORIE DES INTERSECTIONS ET THEOREME DE RIEMANN-ROCH

(SGA 6)

un Séminaire dirigé par

P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE

avec la collaboration de

D. FERRAND, J.P. JOUANOLOU, O. JUSSILA,
S. KLEIMAN, M. RAYNAUD, J.P. SERRE

PREFACE

La présente édition du Séminaire de Géométrie Algébrique 6 reproduit à peu de chose près la première édition, distribuée par l'I.H.E.S. sous forme d'exposés multigraphiés. Les corrections effectuées portent essentiellement sur des fautes d'impression, sauf dans les exposés I et III, où de légères modifications ont été apportées par L. Illusie à quelques énoncés incorrects dans la version primitive. D'autre part, des notes ont été rajoutées en bas de page, en particulier dans l'exposé XIV par A. Grothendieck, afin de signaler des progrès récents dans des questions encore ouvertes lors du Séminaire. Signalons enfin que l'exposé XI, de D. Ferrand, concernant la théorie du déterminant pour les complexes parfaits, n'a pas été régigé, et ne sera donc pas publié ; pour éviter des erreurs de référence, nous avons gardé telle quelle la numérotation des exposés suivants.

Juin 1971

INTRODUCTION

Le but du présent Séminaire est de développer une théorie globale des intersections, et une formule de Riemann-Roch, pour des schémas quelconques. Le lecteur trouvera une description du programme du Séminaire dans l'exposé 0. La possibilité en principe d'une démonstration d'une formule de Riemann-Roch pour les schémas réguliers généraux, suivant les lignes du rapport bien connu de Borel-Serre en 1958, était claire dès ce moment, du moins pour un morphisme projectif. L'extension au cas général est moins évidente ; le programme dans lequel elle s'insère (et partiellement réalisé dans notre séminaire) remonte à 1960. Comme c'était également le cas pour la théorie de dualité des faisceaux cohérents (cf. R. Hartshorne, Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics n° 20, Springer), un outil essentiel pour formuler une théorie satisfaisante est la théorie des catégories dérivées de Verdier, dont la connaissance est indispensable pour la compréhension du Séminaire. A part cette théorie, l'étude du Séminaire n'exige guère qu'une connaissance générale des fondements de la Géométrie Algébrique, tels qu'ils sont exposés dans EGA, chapitres I,II,III ; nous n'aurons en plus que des références occasionnelles à faire à EGA IV, pour certains faits concernant les morphismes plats ou lisses, qui pour l'essentiel figurent également dans les premiers exposés de SGA 1. Enfin, pour développer certains résultats avec toute la généralité souhaitable pour les applications, nous faisons usage parfois de la notion de site annelé et de topos annelé, pour laquelle nous renvoyons à SGA 4, exposés I à IV. Le lecteur qui ignorerait le langage des sites et topos pourra remplacer partout lesdits objets par des espaces topologiques ordinaires, les objets du topos étant alors remplacés par des ouverts de ces espaces; mais nous lui conseillons néanmoins, de préférence, de s'assimiler le langage des topos, qui fournit un principe d'unification extrêment commode.

La notion fondamentale pour la théorie présentée ici est celle de complexe de Modules parfait, et ses diverses variantes, développées dans les exposés I,II,III . Il semble clair que ces notions, importantes également dans d'autres contextes en Géométrie Algébrique (notamment pour les formules de type Lefschetz-Verdier en cohomologie à coéfficients discrets (SGA 5) ou cohérents), auront aussi leur rôle à jouer en dehors de la Géométrie Algèbrique, notamment pour la formulation d'une variante analytique complexe du théorème de Riemann-Roch présenté ici, ou de variantes convenables du théorème de l'index d'Atiyah-Singer. Quelques indications dans ce sens seront données dans Exp. II. Malheureusement, il manque encore à l'heure actuelle un énoncé, même heuristique, qui engloberait ces deux théorèmes (dont le premier pour l'instant reste conjectural). Il manque apparemment une idée nouvelle, comme il en manque aussi en Géométrie Algèbrique pour parvenir à une démonstration du théorème de Riemann-Roch en dehors d'hypothèses projectives (cf. Exp. XIV, n° 2).

Nous n'aurons à faire nul usage dans ce séminaire de la théorie locale des intersections, exposée dans J.P. Serre, Algèbre Locale.Multiplicités (Lectures Notes in Mathematics n° 11, Springer), et nous contenterons simplement de signaler ici que ce cours de Serre a eu une inflence évidente sur la genèse de la théorie en 1957. Nous n'utiliserons pas non plus la théorie de l'anneau de Chow développée dans Séminaire Chevalley 1958, exposés 2 et 3 (Ecole Normale Supérieure). Cette théorie est liée de façon essentielle à des hypothèses de non singularité, alors que le but de notre séminaire est au contraire de développer une théorie des intersections sur les schémas généraux (et même les topos localement annelés généraux) voir à ce sujet les commentaires dans Exp. XIV n°4 et n°8, donnant les relations entre notre théorie et celle de l'anneau de Chow, et posant la question d'une généralisation de cette dernière. Nous pouvons dire que le Séminaire présente une théorie des intersections cohérente et se suffisant à elle même, mais nullement exhaustive des différents points de vue utiles (voire indispensables) en théorie des intersections, et qu'il convient par suite de le compléter par les exposés cites de Serre et de Chevalley.

Nous avons joint au séminaire (en Appendice à Exp. O) le rapport Grothendieck de 1957 "classes de Faisceaux et théorème de Riemann-Roch", qui avait servi de base au séminaire de Borel et Serre à Princeton la même année, ainsi qu'à leur article déjà cité. Ce rapport esquisse deux démonstrations du théorème de Riemann-Roch pour les variétés quasi-projectives non singulières, dont la première, valable pour le moment seulement en caractéristique nulle, mais donnant en revanche un résultat un peu plus précis dans le cas d'une immersion, ne figure pas encore dans la littérature (sans exclure le travail de Borel-Serre ni le présent séminaire). La lecture de ce rapport ne présuppose bien entendu celle d'aucun autre exposé du séminaire, et peut même servir d'introduction à l'étude de ce dernier au même titre que l'exposé O, surtout pour un lecteur qui ne serait pas encore familier avec Borel-Serre. La démonstration à laquelle nous venons de faire allusion s'applique d'ailleurs essentiellement telle quelle au cas d'un morphisme projectif d'espaces analytiques complexes, et s'appliquera sans doute également en caractéristique quelconque, une fois résolu le problème des opérations "puissances extérieures" dans la catégorie dérivée (cf. Exp. XIV, n°s 1,2,3). C'est l'absence d'une étude de cette question qui constitue sans doute la lacune la plus sérieuse dans ce Séminaire, dans l'optique même où nous nous y sommes placés.

On remarquera l'absence, dans la table des matières du présent Séminaire, de deux des participants mentionnés sur la page de garde. L'un, J.P. Jouanolou, avait pris une part active à l'élaboration technique de la première partie du séminaire, mais avait été empêché de prendre part aux exposés oraux ; on lui doit notamment l'assertion d'indépendance linéaire contenue dans l'important énoncé VI 1.1. donnant la structure de l'anneau $K^{\cdot}$ des classes de Modules localement libres sur un fibré projectif (qui n'était prouvé auparavant que lorsqu'on supposait que le schéma de base admet un Module inversible ample). L'autre, J.P. Serre, avait fait deux exposés oraux, logiquement indépendants du reste du Séminaire, et qu'il a par suite préféré publier sous forme d'article séparé (cf. J.P. Serre, Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés à paraître dans Publications Mathématiques, n° 34).

Comme dans les autres parties du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, les sigles SGA 1 à SGA 6 renvoient aux différentes parties dudit Séminaire, le chiffre romain suivant ce sigle indiquant le n° de l'exposé, et les chiffres arabes qui le suivent correspondant à la numérotation intérieure de l'exposé en question; pour les références intérieures au présent Séminaire, on omet le sigle SGA 6, en utilisant des références style I 4.9 (signifiant: exposé I, énoncé 4.9). Le sigle EGA réfère aux Eléments de Géométrie Algébrique de J. Dieudonné et A. Grothendieck.

TABLE DES MATIERES

Exposé 0

ESQUISSE D'UN PROGRAMME POUR UNE THEORIE DES INTERSECTIONS SUR LES SCHEMAS GENERAUX

par A. Grothendieck

Le présent exposé est de nature introductif, et sa lecture n'est pas logiquement indispensable pour l'étude du Séminaire. Il s'adresse plus particulièrement aux lecteurs au courant de la version provisoire du théorème de Riemann-Roch, telle qu'elle est exposée dans le rapport de Borel-Serre [2] ou dans le rapport de Grothendieck déjà mentionné dans l'Introduction (cité [RRR] par la suite), et qui est reproduit sous forme d'appendice à la fin du présent exposé.

1. Rappelons la formule de Riemann-Roch pour un morphisme propre

$$f: X \longrightarrow Y$$

de schémas quasi-projectifs et lisses sur un corps k, et un faisceau cohérent F sur X, dont la classe dans le groupe K(X) des classes de faisceaux cohérents sur X est notée par $c\ell(F)$:

(1.1) $$\mathrm{Todd}(T_Y)\ \mathrm{ch}_Y(f_*(c\ell(F))) = f_*(\mathrm{Todd}(T_X)\ \mathrm{ch}_X(F)) \quad .$$

Cette formule est valable dans $A(Y)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, où A(Y) est l'anneau de Chow de Y, le f_* du second membre étant déduit par tensorisation par $\mathbb{Q}$ de l'homomorphisme "image directe de cycles"

$$f_*: A(X) \longrightarrow A(Y) \ ,$$

celui du premier étant la caractéristique d'Euler-Poincaré de F relativement à f :

$$f_*(c\ell(F)) = \sum_i (-1)^i c\ell(R^i f_*(F)) \ ;$$

ch_X , ch_Y désignent les caractères de Chern sur X resp. sur Y, et T_X,T_Y les fibrés tangents à X resp. à Y. Comme on sait, Todd(-) et ch(-) sont des polynômes universels à coéfficients dans Q en les classes de Chern de l'argument. Le terme constant de Todd(-) étant 1, c'est un élément inversible pour toute valeur de l'argument, de sorte que la formule (1.1) prend après multiplication par $\mathrm{Todd}(T_Y)^{-1}$ la forme équivalente, plus commode pour notre propos

(1.2) $$\mathrm{ch}_Y(f_*(c\ell(F)) = f_*(\mathrm{Todd}(T_f).\mathrm{ch}_X(F)) \quad ,$$

où on a posé

(1.3) $$T_f = T_X - f^*(T_Y) \in K(X) \quad ,$$

de sorte que T_f joue le rôle d'un fibré tangent relatif virtuel de X sur Y. Dans le cas où le morphisme f est lisse (i.e. à application tangente partout surjective), on a simplement

$$T_f = T_{X/Y} \quad \text{(fibré tangent le long des fibres)} ,$$

tandis que dans le cas où $f:X \longrightarrow Y$ est une immersion, on trouve

$$T_f = - \check{N}_{X/Y} \quad ,$$

où $\check{N}_{X/Y}$ désigne le faisceau normal de X dans Y.

Un des buts principaux du Séminaire est de généraliser (1.2) simultanément dans deux directions :

a) Se débarasser de l'hypothèse de l'existence d'un corps de base k.

b) Remplacer les hypothèses de régularité sur Y,X par une hypothèse de "régularité locale" de f.

Enfin, chemin faisant nous nous occuperons également du problème :

c) Eliminer les hypothèses de quasi-projectivité qui, en l'absence d'un corps de base, s'expriment par l'existence de Modules inversibles amples sur X et sur Y.

2. Examinons d'abord la généralisation a), en gardant cependant les hypothèses de régularité et d'existence de Modules inversibles amples sur X et sur Y.

La définition de K(X),K(Y) et de l'homomorphisme $f_* : K(X) \longrightarrow K(Y)$ n'offre alors pas de nouveau problème, grâce au fait que X et Y sont réguliers. La voie la plus naturelle pour donner un sens à (1.2) semble donc consister en la définition d'anneaux de Chow A(X),A(Y) et d'un homomorphisme de groupes

$$f_* : A(X) \longrightarrow A(Y) \quad ,$$

en l'établissement d'une théorie des classes de Chern, fournissant des applications

$$c_i : K(X) \longrightarrow A(X) \quad ,$$

et de même pour Y, et enfin en la description d'un élément fibré tangent relatif virtuel

$$T_f \in K(X) \quad .$$

2 1 Pour ce qui est de cette dernière, une définition s'offre de façon assez évidente. On utilise le fait que le morphisme f, grâce à l'hypothèse d'existence d'un Module inversible ample sur X et sur Y, peut se factoriser en

(2.1) $$X \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{f'} Y ,$$

où i est une immersion fermée, et f' un morphisme lisse ; par exemple on pourra prendre $X' = \mathbb{P}^r_Y$ pour r convenable. On posera alors

(2.2) $$\check{T}_f = cl\,(\underline{\Omega}^1_{X'/Y}) - cl\,(\underline{N}_{X/X'}) ,$$

où $\underline{\Omega}^1_{X'/Y}$ est le Module localement libre des 1-différentielles relatives de X' sur Y (ou Module cotangent relatif de X' sur Y), et $\underline{N}_{X/X'}$ le Module conormal de X dans X', égal par définition à $\underline{J}/\underline{J}^2$, où $\underline{J}$ est l'Idéal sur X' définissant le sous-schémas fermé X ; comme X et X' sont réguliers, on en conclut d'ailleurs que $\underline{N}_{X/X'}$ est également localement libre. Enfin $\check{T}_f$ désigne le dual de T_f On vérifie sans peine (Exp VIII) que l'élément T_f défini par (2 1) ne dépend pas de la factorisation de f choisie

2 2 Quant à une définition, sous les conditions envisagées, d'un anneau de Chow et d'une théorie des classes de Chern correspondante, bien qu'il soit plausible qu'une telle théorie doive pouvoir se développer sur le modèle de celle déjà connue pour les schémas algébriques lisses et quasi-porjectifs, il semble que ce travail n'ait pas été fait à l'heure actuelle, et à fortiori il n'a pas été entrepris dans le Séminaire. On introduit par contre un autre anneau, qui jouera un rôle analogue à celui de l'anneau de Chow, et dont le produit tensoriel par Q est effectivement isomorphe à $A(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ dans le cas où X est quasi-projectif et lisse sur un corps k. Cet anneau est l'anneau gradué associé à K(X), pour une filtration convenable de cet anneau. Une première filtration naturelle de K(X), qui est celle envisagée dans [RRR] , est la "filtration topologique" par la codimension du support des faisceaux cohérents, $\mathrm{Filt}^i_{top}K(X)$ étant engendré par les $cl(F)$ avec F cohérent et $\mathrm{codim}(\mathrm{supp}F,X) \geqslant i$. Une première question est celle de la compatibilité de cette filtration avec la structure d'anneau, question résolue dans [RRR] , dans le cas X lisse sur un coprs k, grâce au "moving lemma" de Chow. Ce point admis, on trouve donc un anneau gradué associé, que nous noterons ici $\mathrm{Gr}^{\cdot}_{top}(X)$. Dans [RRR] on définit un homomorphisme d'anneaux surjectif

$$\phi :\ A(X) \longrightarrow \mathrm{Gr}^{\cdot}_{top}(X) ,$$

(tranformant la classe d'un cycle premier Z en $\mathrm{cl}(\underline{O}_Z)$,) dont il s'avère ensuite (Exp. XIV 4.2) que le noyau est un sous-groupe de torsion. De plus, on montre dans [RRR] comment les images dans $\mathrm{Gr}^{\cdot}_{\mathrm{top}}(X)$ des classes de Chern $c_i(F)$ peuvent se calculer directement en termes de $\mathrm{cl}(F) \in K(X)$ et des opérations λ^i de puissance extérieure dans K(X).

Ceci montre que, pour X schéma noethérien régulier muni d'un Module inversible ample, l'anneau $\mathrm{Gr}^{\cdot}_{\mathrm{top}}(X)$ est un substitut commode pour l'anneau de Chow hypothétique A(X) ; il a de plus l'avantage sur ce dernier que c'est directement dans cet anneau que se font certains calculs de [RRR] aboutissant à des formules importantes dans cet anneau, formules qui même pour X projectif et lisse sur un corps ne sont pas établies à l'heure actuelle dans A(X) lui-même (Exp. XIV, 4 3 et 4.4). Pour justifier entièrement ce point de vue, il faudrait cependant résoudre le problème signalé plus haut de la compatibilité de la filtration topologique de K(X) avec sa structure d'anneau, problème qui semble essentiellement lié au "moving lemma" de Chow, qui lui-même est l'ingrédient technique essentiel de la théorie de l'anneau de Chow que nous avons prétendu pouvoir éviter.

2.3 Pour éviter ce problème, on munit K(X) d'une deuxième filtration, plus fine que la filtration topologique, et qui peut se décrire en termes purement algébriques à partir de la structure de λ- anneau augmenté de K(X). La définition de cette filtration est suggérée par l'expression donnée dans [RRR] des classes de Chern d'un $x \in K(X)$ dans $\mathrm{Gr}^{\cdot}_{\mathrm{top}}(X)$,

(2.3) $$c_i(x) = \gamma^i(x - \varepsilon(x)) \mod \mathrm{Filt}^{i+1}_{\mathrm{top}} K(X) \quad ,$$

où γ^i désigne une certaine combinaison linéaire des λ^j ($j=i$) explicitée dans loc. cit. , ε étant l'augmentation. On montre que $\gamma^i(x - \varepsilon(x))$ est bien de filtration topologique $\geqslant i$, ce qui donne un sens à la formule (2.3). On définit alors la λ-<u>filtration</u> de K(X) par les idéaux $\mathrm{Filt}^i K(X)$, où $\mathrm{Filt}^i K(X)$ est formé par les sommes d'expression de la forme

$$\gamma^{i_1}(x_1 - \varepsilon(x_1)) \ldots \gamma^{i_k}(x_k - \varepsilon(x_k)) \quad , \quad i_1 + \ldots + i_k \geqslant i \quad .$$

L'anneau gradué associé à cette filtration sera noté $\mathrm{Gr}^{\cdot}(X)$, et c'est lui qui remplacera dans le Séminaire l'anneau de Chow de X. On peut d'ailleurs montrer que dans le cas envisagé ici l'homomorphisme canonique

(2 4) $$\mathrm{Gr}^{\cdot}(X) \longrightarrow \mathrm{Gr}^{\cdot}_{\mathrm{top}}(X)$$

est un isomorphisme modulo torsion, ce qui justifie le point de vue suivant lequel cet anneau tensorisé par $\mathbb{Q}$ peut jouer en tous points le même rôle que l'anneau de Chow tensorisé par $\mathbb{Q}$ D'autre part, on a fait exactement ce qu'il fallait pour que la formule (2.3) (où on remplace $\mathrm{Filt}^i_{\mathrm{top}}$ par Filt^i) définisse une théorie des classes de Chern à valeurs dans $\mathrm{Gr}^{\cdot}(X)$, dont les classes de Chern dans $\mathrm{Gr}^{\cdot}_{\mathrm{top}}(X)$ se déduisent à l'aide de l'homomorphisme (2.4). On montre (Exp.V), grâce au fait (Exp.VI) que K(X) est un λ-anneau <u>spécial</u> au sens de [RRR] (i.e. un λ-anneau au sens de Exp.V) que cette notion de classe de Chern satisfait à toutes les propriétés formelles habituelles, passées en revue dans [RRR].

2.4. On notera un avantage très appréciable de la définition de $\mathrm{Gr}^{\cdot}(X)$ sur celle de A(X) et $\mathrm{Gr}^{\cdot}_{\mathrm{top}}(X)$, c'est qu'elle garde un sens pour un schéma X absolument quelconque, et plus généralement pour un topos localement annelé quelconque X, en prenant alors pour K(X) le groupe de classes construit avec les Modules localement libres sur X, qui est encore un λ-anneau augmenté, donc muni d'une filtration correspondante, permettant de définir un gradué associé $\mathrm{Gr}^{\cdot}(X)$. Comme prix de cette généralité, il faut cependant remarquer que lorsqu'on n'est pas disposé à négliger les phénomènes de torsion i.e. à tensoriser par $\mathbb{Q}$, les propriétés de $\mathrm{Gr}^{\cdot}(X)$ sont moins satisfaisantes à divers égards que celles de ses deux concurents (Exp.XIV n° 4). C'est ainsi que, supposant à nouveau que $f:X\longrightarrow Y$ est un morphisme propre de schémas noethériens réguliers munis de Modules inversibles amples, il n'est pas vrai en général que l'homomorphisme $f_*: K(X)\longrightarrow K(Y)$ applique $\mathrm{Filt}^iK(X)$ dans $\mathrm{Filt}^{i-d}K(Y)$, où d est la dimension relative de X sur Y, et définisse par suite par passage aux gradués associés un homomorphisme de degré -d de $\mathrm{Gr}^{\cdot}(X)$ dans $\mathrm{Gr}^{\cdot}(Y)$. Cependant, on peut prouver (Exp.VII) qu'il en est ainsi à condition de tensoriser par $\mathbb{Q}$, de sorte qu'on obtient un homomorphisme de degré -d

$$(2.5)\qquad f_*:\ \mathrm{Gr}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}}\longrightarrow \mathrm{Gr}^{\cdot}(Y)_{\mathbb{Q}}\ ,$$

jouant le rôle de l'homomorphisme "image directe de cycles" $A(X)\longrightarrow A(Y)$.

Ceci posé, nous voyons donc que nous sommes en possession de tous les éléments de structure pour donner un sens à la formule (1.2) lorsqu'on ne postule pas l'existence d'un corps de base, $f:X\longrightarrow Y$ étant morphisme propre de schémas noethériens réguliers admettant des Modules inversibles amples.

3. Montrons maintenant comment on peut encore donner un sens à la formule (2.2) lorsqu'on abandonne l'hypothèse de régularité faite sur X,Y, en la remplaçant par une hypothèse de nature locale sur le morphisme f, que nous allons préciser.

3.1 Une première difficulté provient du fait que l'observation qui avait servie de point de départ à la théorie [RRR], savoir que le groupe K(X) des classes de faisceaux sur X est le même, qu'on le définisse en termes de faisceaux cohérents, ou en termes de faisceaux localement libres, est liée de façon essentielle à l'hypothèse de régularité sur X. Dans le cas où X est un schéma (disons noethérien, pour simplifier) général, il convient de distinguer entre ces deux groupes, que nous noterons respectivement $K_{\cdot}(X)$ et $K^{\cdot}(X)$, le premier ayant un caractère covariant en X pour les morphismes propres, le deuxième un caractère contravariant en X pour les morphismes quelconques. On notera que $K^{\cdot}(X)$ est muni de façon naturelle d'une structure d'anneau (et même de λ-anneau augmenté), alors que sur $K_{\cdot}(X)$ il n'y a plus en général une structure d'anneau, mais seulement une structure de module sur $K^{\cdot}(X)$. L'homomorphisme $x \to x\, cl_{\cdot}(\underline{O}_X)$ (où $cl_{\cdot}(\underline{F})$ désigne la classe de $\underline{F}$ dans $K_{\cdot}(X)$) de $K^{\cdot}(X)$ dans $K_{\cdot}(X)$ n'est plus en général un isomorphisme. <u>Pour notre formulation du théorème de Riemann-Roch généralisé</u>, <u>nous travaillerons exclusivement avec</u> $K^{\cdot}(X)$, $K^{\cdot}(Y)$, <u>à l'exclusion de</u> $K_{\cdot}(X)$, $K_{\cdot}(Y)$. Comme nous avons signalé dans 2.3., ces λ-anneaux augmentés, munis de leur λ-filtration naturelle, donnent naissance à des anneaux gradués $Gr^{\cdot}(X)$, $Gr^{\cdot}(Y)$, et des homomorphismes "classes de Chern"

$$c_i : K^{\cdot}(X) \to Gr^{\cdot}(X) ,$$

et de même pour Y. La difficulté vient cependant dans la définition d'un homomorphisme image directe

$$(3\ 1) \qquad f_* : K^{\cdot}(X) \to K^{\cdot}(Y) ,$$

qui ne peut plus être définie par la formule naïve

$$f_*(cl^{\cdot}(\underline{E})) = \sum_i (-1)^i \, cl^{\cdot}(R^i f_*(\underline{F})) ,$$

car même si $\underline{F}$ est localement libre, les Modules $R^i f_*(\underline{F})$ ne sont plus en général localement libres, ni même de tor-dimension finie, et la formule précédente perd son sens. Une solution de cette difficulté est fournie par le point de vue des <u>catégories dérivées</u>. En effet, alors que les $R^i f_*(\underline{F})$ sont en général des "mauvais" faisceaux, de tor-dimension infinie disons, auxquels on ne saurait associer de classe dans $K^{\cdot}(Y)$, cependant le complexe $Rf_{*}(\underline{F})$ sur Y, image directe de $\underline{F}$ au sens des catégories dérivées, dont les $R^{i}f_{*}(\underline{F})$ sont des faisceaux de cohomologie, a tendance à être excellent. De façon précise, supposons que $\underline{F}$ soit de tor-dimension finie sur $\underline{O}_Y$, ce qui sera le cas si $\underline{O}_X$ est de tor-dimension finie sur $\underline{O}_Y$ et si de plus F est localement libre. Alors on montre (Exp. III) que le complexe $Rf_{*}(F)$ est "parfait", par quoi on entend ici: à faisceaux de cohomologie cohérents (ce qu'on savait déjà de toutes façons) et de tor-dimension globale finie ; ou encore : sur tout ouvert affine U de Y, ce complexe est isomorphe, dans la catégorie dérivée D(U), à un complexe à degrés bornés et localement libre de type fini en chaque degré. Du point de vue de l'Algèbre Homologique, les complexes parfaits sont "aussi bons" que les Modules localement libres, dont ils constituent la généralisation naturelle. Ils forment d'ailleurs une "sous-catégorie triangulée" de la catégorie dérivée D(Y), i.e. une sous-catégorie stable par les cônes (ou "mapping cylinders") de morphismes. D'autre part, à toute catégorie triangulée C on associe un groupe K(C) de classes, variante naturelle de la construction du groupe des classes d'une catégorie abélienne, en prenant le groupe libre engendré par les objets de C, divisé par les relations

$$cl(K) - cl(K') - cl(K'')$$

pour tout triangle distingué

$$\begin{tikzcd} & K'' \arrow[dl] & \\ K' \arrow[rr] & & K \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad .$$

Ce qui remplace alors l'observation fondamentale de [RRR] dans le cas actuel est le fait que, lorsque le schéma Y admet un Module inversible ample, tout complexe parfait L. sur Y est globalement (et non seulement localement) isomorphe dans D(Y) à un complexe L! à degrés bornés et localement libre de type fini en chaque degré (Exp II); d'où il résulte facilement (Exp.IV) que l'homomorphisme canonique

$$K^{\cdot}(X) \longrightarrow K(Parf(Y)) \quad ,$$

où Parf(Y) est la catégorie triangulée des complexes parfaits sur Y, est un isomorphisme. Donc à tout complexe parfait L. sur Y on peut associer une classe

$$c\ell^{\cdot}(L.) \in K^{\cdot}(Y) \quad ,$$

qui n'est d'ailleurs autre que

$$cl(L.) = \sum_i (-1)^i \, cl^{\cdot}(L_i^!) \quad ,$$

où $L^!$ est comme ci-dessus, de sorte que les $L_i^!$ sont bien des Modules localement libres sur Y dont on peut prendre les classes dans $K^{\cdot}(Y)$.

Ceci posé, on définit un homomorphisme (3.1) chaque fois que $f:X \longrightarrow Y$ est un morphisme <u>propre</u> <u>de tor-dimension finie</u> de schémas noethériens tels que Y admette un Module inversible ample, en posant simplement

(3.2) $$f_*(cl^{\cdot}(\underline{F})) = cl^{\cdot}(Rf_*(\underline{F}))$$

pour tout Module localement libre $\underline{F}$ sur X (de sorte que $Rf_*(\underline{F})$ est bien un complexe parfait sur Y, et le deuxième membre est défini). Lorsque X également admet un Module inversible ample, alors $K^{\cdot}(X)$ peut s'interpréter également comme K(Parf(X)), et l'homomorphisme (3.1) n'est autre que celui qui est associé, par fonctorialité, au foncteur exact de catégories triangulées induit par

$$Rf_* : \mathrm{Parf}(X) \longrightarrow \mathrm{Parf}(Y) \quad .$$

3.2. Pour donner un sens à (1.2), il reste encore à faire sur f une hypothèse permettant de donner un sens à l'homomorphisme (2.5)

(3.3) $$f_* : \quad Gr^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Gr^{\cdot}(Y)_{\mathbb{Q}} \quad ,$$

i.e. assurant que l'homomorphisme (3.1) qu'on vient de définir est (modulo un décalage et modulo torsion) compatible aux filtrations de ces anneaux ; et enfin à définir encore un élément "fibré tangent relatif virtuel"

$$T_f \in K^{\cdot}(X) \quad .$$

Pour ce dernier, reprenant la définition proposée dans 2.1, on voit qu'il y a lieu de faire une hypothèse assurant que (avec les notations de loc. cit.) le Module conormal $\underline{N}_{X/X'}$ soit localement libre. L'hypothèse la plus naturelle à cet effet est celle que i soit une "immersion régulière", i.e. identifie X à un sous-schémas de X' défini par un Idéal qui localement peut être défini par une suite $\underline{O}_{X'}$-régulière de sections de $\underline{O}_{X'}$. Cette hypothèse, de nature purement locale, ne dépend pas en fait du choix de la factorisation de f en une immersion suivie d'un morphisme lisse (Exp. VIII), et comme plus haut, il en est de même pour la classe T_f défini par la formule (2.1). Lorsque l'hypothèse qu'on vient d'envisager est vérifiée, on dit que le morphisme f est un <u>morphisme</u> "<u>localement d'intersection complète</u>"(*). Un <u>tel morphisme</u> est d'ailleurs localement de tor-dimension finie.

(*) On se permettra également de supprimer le vocable "localement" dans cette terminologie, ce qui ne risque d'entrainer aucune confusion.

Si f est un morphisme localement d'intersection complète, on introduit une notion naturelle de "dimension relative virtuelle" d(f) par la formule

$$d(f)(x) = \dim_x(f'^{-1}f(x)) - \mathrm{codim}_x(X,X') \quad .$$

C'est une fonction à valeurs entières localement constante en le point $x \in X$, donc constante si X est connexe, qui ne dépend d'ailleurs pas non plus du choix de la factorisation (2.1). Lorsque cette dimension relative virtuelle d est constante, que f est propre et que X et Y admettent des Modules inversibles amples, on peut montrer (Exp. VIII), encore que ce soit loin d'être un résultat trivial, que l'on a

(3 4) $$f_*(\mathrm{Filt}^i K^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}}) \subset \mathrm{Filt}^{i-d} K^{\cdot}(Y)_{\mathbb{Q}} \quad ,$$

d'où un homomorphisme (3.3) de degré -d.

3.3. Nous avons donc réuni tous les éléments de structure pour donner un sens à la formule (1.2) dans le cas d'un morphisme propre et localement d'intersection complète de schémas noethériens X,Y admettant tous deux des Modules inversibles amples. Moyennant un peu de soin supplémentaire, cette formulation garde d'ailleurs un sens indépendamment de toute hypothèse noethérienne.

Sous cette forme générale, cette formule de Riemann-Roch sera prouvée dans Exp. VIII. Le lecteur constatera que la démonstration donnée dans ce Séminaire combine des éléments des deux démonstrations qui figurent dans [RRR] et dont il a été question dans l'Introduction. La nécessité de recourir aux méthodes de la première de ces démonstrations, impliquant plus de λ-formalisme que la deuxième (suivie dans Borel-Serre), est due à la nécessité d'une démonstration de l'inclusion (3.4), question qui ne se posait pas dans le cadre plus restreint de [RRR] et Borel-Serre [2] , où on pouvait travailler avec l'anneau de Chow ou l'anneau $\mathrm{Gr}^{\cdot}_{top}$. De la deuxième démonstration, nous conservons l'introduction du schéma éclaté de Y le long de X dans le cas où f est une immersion. Cet artifice technique disparaîtra sans doute, et la démonstration du cas d'une immersion s'étendra au cas où on ne postule plus l'existence d'un Module inversible ample sur Y, une fois résolue la question soulevée dans Exp. XIV n° 1 sur l'introduction d'opérations de puissances extérieures dans la catégorie dérivée $D^-(Y)$.

4. Il nous faut enfin donner quelques indications sur la façon dont on peut encore donner un sens à (1.2) en l'absence d'une hypothèse d'existence